UDC 681.3
SCOPUS CODE 2613
https://doi.org/10.36073/1512-0996-2020-2-165-173

Вычисление распределений интегральных полиномов третьего порядка от случайных процессов при помощи фейнмановских интегралов

Реваз Какубава Департамент компьютерной инженерии, Грузинский технический университет, Грузия, 0160, Тбилиси, ул. М. Костава 77
E-mail: r.kakubava@gmail.com

Гиви Пипия Департамент математики, Грузинский технический университет, Грузия, 0160, Тбилиси, ул. М. Костава 77
E-mail: givififia@yahoo.com

Екатерине Гулуа Департамент Вычислительной математики, Грузинский технический университет, Грузия, 0160, Тбилиси, ул. М. Костава 77
E-mail: d_gulua@gtu.ge

Рецензенты:

З. Кватадзе, професср факультета информатики и систем управления ГТУ
E-mail: zurakvatadze@yahoo.com

А. Киртадзе, професср факультета информатики и систем управления ГТ
E-mail: kirtadze2@yahoo.com

Аннотация. В работе исследуются связи и аналогии между задачами теории случайных процессов и фейнмановскими интегралами. На основе ранее полученных результатов показывается существование фейнмановских интегралов для определённого класса функционалов.

Для простейшего случая сдвига в пространстве, условия «абсолютной непрерывности» для интегралов, получающиеся при помощи линейных и нелинейных замен из интегралов по гауссовой квазимере с комплексным параметром были найдены ранее.

В представленной работе, при помощи фейнмановских интегралов, исследуются конкретно интегральные полиномы третьего порядка от случайного процесса. Характеристическая функция таких полиномов является решением дифференциального уравнения в вариационных производных шредингеровского типа и выражается через фейнмановские интегралы. По определению фейнмановских интегралов, они являются пределами конечнократных, что указывает на процедуру их вычисления. Доказательство полученных результатов основывается на вводимом понятии фейнмановского интеграла по конической области.

В работе также находятся чисто вероятностные применения фейнмановских интегралов, удаётся

свести к решению уравнения Шредингера нахождение характеристических функционалов полиномов от случайных процессов и на этом пути указать процедуру их вычисления.

Ключевые слова: случайный процесс, характеристическая функция, измеримое пространство, операторы, интегралы, предельный переход, разбиение отрезка, квазимера, распределение.

Введение

Интегрирование в функциональных пространствах – важный раздел современной математики, тесно связанный с теорией случайных процессов, математическим анализом и имеющий серьезные приложения в математической и теоретической физике.

Для потребностей физики недостаточно интегралов по знакопостоянным мерам. Хорошо известно, что Р. Фейнман дал трактовку квантовой механики и электродинамики, основанную на использовании носящих его имя интегралов в пространстве траектории. Эти интегралы аналогичны средним теории марковских случайных процессов, но роль переходных вероятностей играют комплексные функции, представляющие собой фундаментальные решения уравнений шредингеровского типа.

Соответствующая «Мера Фейнмана» не имеет ограниченной вариации уже на алгебре цилиндрических множеств [1], и потому фейнмановские интегралы не могут строиться так, как это делается в классической теории меры: они получаются в результате специальной предельной процедуры.

Рассмотрим класс функций, для которых существует фейнмановский интеграл.

Пусть $\tilde{X} = X + iX$ комплексное расширение пространства *X*. Мы будем говорить, что $f(x)$ – функция класса А, если она удовлетворяет следующим условиям:

А – 1) $f(\lambda x)$ – измерима относительно $x \in X$, при $\lambda \in \bar{V}$, где $z = \lambda x$,

$$V = \left\{ \lambda : \ \lambda = \rho e^{i\gamma}, \ 0 < \gamma < \frac{\pi}{4} \right\}$$

А – 2) $f(\lambda x)$ – аналитична по λ в области V и непрерывна вдоль границы при $x \in X$.

А – 3) выполняется оценка

$$\left| f(xe^{i\gamma}) \right| \le c \cdot e^{(Ax,x)\sin 2\gamma + g(x)} \varphi(\|x\|), \quad (A < B^{-1})$$

где $\varphi(x)$ ограничена и непрерывна в любом конечном пространстве, а $\dfrac{g(x)}{(B^{-1}x, x)} \to 0$ при $\|x\| \to \infty$ равномерно на сфере в любом конечномерном пространстве.

Основная часть

Пусть $\varepsilon(t)$ $(0 \le t \le T)$ – случайный процесс, имеющий измеримые, почти наверно ограниченные траектории, с известным характеристическим функционалом.

$$\chi_\varepsilon(\theta) = M \exp[i \int_0^T \theta(\tau)\varepsilon(\tau) d\tau].$$

Рассмотрим интегральный полином вида

$$\eta_n = \int_0^T \sum_{k=1}^n \alpha_k(\tau) \varepsilon^k(\tau) d\tau. \tag{1}$$

характеристическая функция которого является функционалом от коэффициентов полинома (1).

$$\chi_n(\alpha_1 ..., \alpha_n) = M \exp\left[i \sum_{k=1}^n \int_0^T \alpha_k(\tau) \varepsilon^k(\tau) d\tau \right]. \tag{2}$$

Вычислим распределение дискретного аналога функционала (2) для n=3

Теорема 1. Если

$$\begin{aligned} \chi^{(3)}(\alpha, \beta, \gamma) &= \chi^{(3)}(\alpha_1, ..., \alpha_m; \beta_1, ..., \beta_m; \gamma_1, ..., \gamma_m) = \\ &= M \exp\left\{ i \sum_{k=1}^m \alpha_k \varepsilon_k + i \sum_{k=1}^m \beta_k \varepsilon_k^2 + i \sum_{k=1}^m \gamma_k \varepsilon_k^3 \right\}, \end{aligned} \tag{3}$$

то

$$\chi^{(3)}(\alpha,\beta,\gamma)=$$
$$=\int\limits_{R^{2m}}\chi^{(2)}(\alpha+y^{(1)},\beta+y^{(2)})\mu_{-iA\gamma}(dy^{(1)}\times dy^{(2)}), \qquad (4)$$

где $y^{(1)}=(y_1^{(1)},...,y_m^{(1)}),\ \ y^{(2)}=(y_1^{(2)},...,y_m^{(2)})$, а матрица A имеет вид

$$A=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}&&0\\&\ddots&\\0&&\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Если $\chi^{(2)}(\alpha,\beta)$ функция класса A, то

$$\chi^{(3)}(\alpha,\beta,\gamma)=\int\limits_{R^{2m}}\chi^{(2)}(\alpha+\sqrt{-i\gamma}\,y^{(1)},$$
$$\beta+\sqrt{-i\gamma}\,y^{(2)})\mu_A(dy^{(1)}\times dy^{(2)}).$$

Доказательство. Пусть

$$\gamma_S^{(3)}(\alpha,\beta,\gamma_1,...,\gamma_S)=\gamma^{(3)}(\alpha,\beta,\gamma_1,...,\gamma_S,0,...0).$$

Если продифференцируем равенство (3), то получим

$$\frac{\partial\chi_s^{(3)}}{\partial\gamma_s}=iM\left[\varepsilon_s^3e^{\left\{i\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k+i\sum\limits_{k=1}^{m}\beta_k\varepsilon_k^2+i\sum\limits_{k=1}^{s}\gamma_k\varepsilon_k^2\right\}}\right],$$

$$\frac{\partial^2\chi_s^{(3)}}{\partial\alpha_s\partial\beta_s}=-M\left[\varepsilon_s^3e^{\left\{i\sum\limits_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k+i\sum\limits_{k=1}^{m}\beta_k\varepsilon_k^2+i\sum\limits_{k=1}^{s}\gamma_k\varepsilon_k^2\right\}}\right],$$

а также следующую систему для задачи Коши

$$\frac{\partial\chi_s^{(3)}}{\partial\gamma_s}=-i\frac{\partial^2\chi_s^{(3)}}{\partial\alpha_s\partial\beta_s},\ \ s=\overline{1,m},$$
$$\chi_s^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma_1,...,\gamma_s)_{\gamma_s=0}=\chi_{s-1}^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma_1,...,\gamma_{s-1})$$

и

$$\chi_0^{(3)}(\alpha;\beta)=\chi^{(2)}(\alpha;\beta)$$
$$\frac{\partial\chi_1^{(3)}}{\partial\gamma_1}=-i\frac{\partial^2\chi_1^{(3)}}{\partial\alpha_1\partial\beta_1};\ \ \chi_1^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma_1)_{\gamma_1=0}=\chi_0^{(3)}(\alpha;\beta)=\chi^{(2)}(\alpha;\beta)$$
$$\frac{\partial\chi_2^{(3)}}{\partial\gamma_2}=-i\frac{\partial^2\chi_2^{(3)}}{\partial\alpha_2\partial\beta_2};\ \ \chi_2^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma_1;\gamma_2)_{\gamma_2=0}=\chi_1^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial\chi_m^{(3)}}{\partial\gamma_m}=-i\frac{\partial^2\chi_m^{(3)}}{\partial\alpha_m\partial\beta_m};\ \ \chi_m^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma_1,...,\gamma_m)_{\gamma_m=0}=\chi_{m-1}^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma_1,...,\gamma_{m-1})$$

Применяя формулу u(x,t)= $\int_H f(x+y)m_{iAt}(dy)$ получим

$$\chi_1^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma_1)=\int_{R^2}\chi^{(2)}(\alpha_1+y_1^{(1)},\alpha_2,...,\alpha_m;\beta_1+y_1^{(2)},\beta_2,...,\beta_m)\mu_{-iI\gamma_1}(dy_1^{(1)}\times dy_1^{(2)}),$$

$$\chi_2^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma_1;\gamma_2)=\int_{R^2}\chi_1^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2+y_2^{(1)},\alpha_3,...,\alpha_m;\beta_1,\beta_2+y_2^{(2)},\beta_3,...,\beta_m;\gamma_1)\mu_{-iI\gamma_2}(dy_2^{(1)}\times dy_2^{(2)})=$$

$$=\int_{R^2}\left\{\int_{R^2}\chi^{(2)}(\alpha_2+y_1^{(1)},\alpha_2+y_2^{(1)},\alpha_3,...,\alpha_m;\beta_1+y_1^{(2)},\beta_2+y_2^{(2)},\beta_3,...,\beta_m)\times\right.$$

$$\left.\times\mu_{-iI\gamma_1}(dy_1^{(1)}\times dy_1^{(2)})\right\}\mu_{-iI\gamma_2}(dy_2^{(1)}\times dy_2^{(2)})$$

и после mшагов

$$\chi_m^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma_1,...,\gamma_m)=\int_{R^{2m}}\chi^{(2)}(\alpha_1+y_1^{(1)},...,\alpha_m+y_m^{(1)};\beta_1+y_1^{(2)},\beta_2++y_m^{(2)})\times$$

$$\times\mu_{-iI\gamma_1}(dy_1^{(1)}\times dy_1^{(2)})\times...\times\mu_{-iI\gamma_m}(dy_m^{(1)}\times dy_m^{(2)})=\int_{R^{2m}}\chi^{(2)}(\alpha_1+y^{(1)};\beta\ +y^{(2)})\cdot\prod_{k=1}^{m}\mu_{-iI\gamma_k}(dy_k^{(1)}\times dy_k^{(2)}).$$

Здесь y – матрица, которая имеет следующий вид

$$y=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Но так как $\chi_m^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma)=\chi^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma),$ то

$$\chi^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma)=\int_{R^{2m}}\chi^{(2)}(\alpha+y^{(1)},\beta+y^{(2)})\mu_{-iAy}(dy^{(1)}\times dy^{(2)}).$$

Теперь можно рассмотреть вопрос о вычислении характеристического функционала для интегрального полинома третьего порядка.

Пусть

$$\chi_3(\alpha;\beta;\gamma)=M\exp\left\{i\int_0^T\alpha(\tau)\varepsilon(\tau)d\tau+i\int_0^T\beta(\tau)\varepsilon^2(\tau)d\tau+i\int_0^T\gamma(\tau)\varepsilon^3(\tau)d\tau\right\}.$$

Теорема 2. Если $\chi^{(2)}(\alpha,\beta)$ функция класса A, то

$$\chi_3(\alpha;\beta;\gamma)=\int_H\int_H\chi_2(\alpha+y^{(1)},\beta+y^{(2)})\mu_{-iAy}(dy^{(1)}\times dy^{(2)}).$$

а корреляционный функционал гауссовой квазимеры $\mu_{-i\gamma A}$ имеет следующий вид

$$i((-i\gamma A)Q,Q)=-2i\int_0^T\gamma(t)Q_1(t)Q_2(t)dt,$$

где $Q=Q_1\times Q_2$.

Доказательство. Рассмотрим разбиение $q(\tau_1,...,\tau_m)$ интервала [0, T]с точками $0<\tau_1<...<\tau_m<T$ и пусть $\varepsilon(\tau_{k-1})=\varepsilon_k$, $\alpha(\tau_k)=\alpha_k\Delta\tau_k$, $\beta(\tau_k)=\beta_k\Delta\tau_k,\gamma(\tau_k)=\gamma_k\Delta\tau_k$.

Обозначим через $\chi_q^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma)$ выражение

$$\chi_q^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma)=M\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\Delta\tau_k+i\sum_{k=1}^{m}\beta_k\varepsilon_k^2\Delta\tau_k+i\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\varepsilon_k^3\Delta\tau_k\right\}.$$

Так как

$$\exp\left\{i\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\varepsilon_k\Delta\tau_k+i\sum_{k=1}^{m}\beta_k\varepsilon_k^2\Delta\tau_k+i\sum_{k=1}^{m}\gamma_k\varepsilon_k^3\Delta\tau_k\right\}\xrightarrow{q}\exp\left\{i\int_0^T\alpha(\tau)\varepsilon(\tau)d\tau+i\int_0^T\beta(\tau)\varepsilon^2(\tau)d\tau+i\int_0^T\gamma(\tau)\varepsilon^3(\tau)d\tau\right\},$$

то применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, получим

$$\lim_q\chi_q^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma)=\chi_3(\alpha;\beta;\gamma)=M\exp\left\{i\int_0^T\alpha(\tau)\varepsilon(\tau)d\tau+i\int_0^T\beta(\tau)\varepsilon^2(\tau)d\tau+i\int_0^T\gamma(\tau)\varepsilon^3(\tau)d\tau\right\},$$

поэтому

$$\chi_3(\alpha;\beta;\gamma)=\lim_q\int_{R^{2m}}\chi_q^{(2)}(\alpha\Delta\tau+\sqrt{-iy}\,y^{(1)},\beta\Delta\tau+\sqrt{-iy}\,y^{(2)})\mu_{\Delta\tau A}(dy^{(1)}\times dy^{(2)}).$$

Оператор A незнакопостоянный оператор, поэтому здесь предельный переход под знаком интеграла совершать нельзя. Дадим другой вид формуле (3).

Пусть $A=U\Lambda U^{-1}$, где U– ортогональная матрица $(U^{-1}=U^*)$, а Λ – диагональная. Для у = $\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ имеем

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix},$$

поэтому получаем для матрицы A

$$A=\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}&&0\\&\ddots&\\0&&\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&&&&&&0\\&-1&&&&&\\&&1&&&&\\&&&-1&&&\\&&&&\ddots&&\\&&&&&-1&\\0&&&&&&1\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}&&\\&\ddots&\\&&\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\end{pmatrix}.$$

Известно, что если μ_{zc} гауссова квазимера в гильбертовом пространстве Hи Sлинейное отображение H → H, то

$$\int_H f(Sx)\mu_{ZC}(dx) = \int_H f(y)\mu_{ZSCS^*}(dy). \tag{5}$$

Так как $A = U\Lambda U^*$, , то

$$\chi^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma) = \int_{R^{2m}} \chi^{(2)}(\alpha + y^{(1)}, \beta + y^{(2)})\mu_{-i\gamma A}(dy^{(1)} \times dy^{(2)}) = \int_{R^{2m}} \chi^{(2)}(\alpha + y^{(1)}, \beta + y^{(2)})\mu_{-i\gamma U\Lambda U^*}(dy^{(1)} \times dy^{(2)}).$$

Пусть $y = Uz$, это значит, что $y^{(1)} = \dfrac{z^{(1)} - z^{(2)}}{\sqrt{2}}$, $y^{(2)} = \dfrac{z^{(1)} + z^{(2)}}{\sqrt{2}}$, а $dy^{(1)} = dz^{(1)}, dy^{(2)} = dz^{(2)}$,

поэтому имея в виду формулу (5), получим

$$\chi^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma) = \int_{R^{2m}} \chi^{(2)}\left(\alpha + \frac{z^{(1)} - z^{(2)}}{\sqrt{2}}, \beta + \frac{z^{(1)} + z^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)\mu_{-i\gamma\Lambda}(dz^{(1)} \times dz^{(2)}).$$

Пусть $\chi^{(2)}(\alpha,\beta)$ функция класса А, тогда

$$\chi^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma) = \int_{R^{2m}} \chi^{(2)}\left(\alpha + \sqrt{-i\gamma}\,\frac{z^{(1)} - z^{(2)}}{\sqrt{2}}, \beta + \sqrt{-i\gamma}\,\frac{z^{(1)} + z^{(2)}}{\sqrt{2}}\right)\mu_{\Lambda}(dz^{(1)} \times dz^{(2)}).$$

Положим, что $\Lambda = \Lambda_1 - \Lambda_2$, где

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & 0 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ 0 & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & & 0 \\ & 1 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & 0 & \\ 0 & & & & & & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\chi^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma) = \int_{R^m}\int_{R^m} \chi^{(2)}\left(\alpha + \sqrt{-i\gamma}\,\frac{z^{(1)} - z^{(2)}}{\sqrt{2}}, \beta + \sqrt{-i\gamma}\,\frac{z^{(1)} + z^{(2)}}{\sqrt{2}}\right) \times \\ \times \mu_{\Lambda_1}(dz^{(1)})\mu_{-\Lambda_2}dz^{(2)}), \tag{6}$$

$$\chi^{(3)}(\alpha;\beta;\gamma) = \lim_q \int_{R^m}\int_{R^m} \chi_q^{(2)}\left(\alpha\Delta\tau + \sqrt{-i\gamma}\,\frac{z^{(1)} - z^{(2)}}{\sqrt{2}}, \beta\Delta\tau + \sqrt{-i\gamma}\,\frac{z^{(1)} + z^{(2)}}{\sqrt{2}}\right) \times \\ \times \mu_{\Delta\tau\Lambda_1}(dz^{(1)})\mu_{-\Delta\tau\Lambda_2}dz^{(2)}). \tag{7}$$

В (7) можно сделать предельный переход под знаком интеграла

$$\chi_3(\alpha;\beta;\gamma) = \int_H\int_H \chi_2\left(\alpha + \sqrt{-i\gamma}\,\frac{z^{(1)} - z^{(2)}}{\sqrt{2}}, \beta + \sqrt{-i\gamma}\,\frac{z^{(1)} + z^{(2)}}{\sqrt{2}}\right) \times \\ \times \mu_{\Lambda_1}(dz^{(1)})\mu_{-\Lambda_2}dz^{(2)}). \tag{8}$$

Если в (8) сделать обратное преобразование переменных, то получим

$$\chi_3(\alpha;\beta;\gamma) = \int_H\int_H \chi_2(\alpha + y^{(1)}, \beta + y^{(2)})\mu_{-i\gamma A}(dy^{(1)} \times dy^{(2)}).$$

ISSN 1512-0996
www.shromebi.gtu.ge

Если $Q = Q_1 \times Q_2$, то корреляционный функционал для гауссовой квазимеры имеет вид

$$i(BQ,Q) = -2i\int_0^T \gamma(t)Q_1(t)Q_2(t)dt, \qquad (9)$$

где $-i\gamma A = iB$, причем оператор A не знакопостоянный даже при $\gamma \geq 0$.

Заключение

Мы вычислили характеристический функционал распределений интегральных полиномов третьего порядка от случайных процессов и нашли корреляционный функционал гауссовой квазимеры $\mu_{-i\gamma A}$

Литература

1. Daletski Yu.L., Phomin S.V. Measures and differential equations in infinite-dimensional spaces. Moscow: "Nauka". 1983. (in Russian).
2. Pipia G. M. On one class of Feynman integral. Bulletin of Academy of Sciences of GSSR, Tbilisi: "Metsniereba". 1982. (in Russian).
3. Skorohod A.V. Integration in Hilbert space. M.: "Nauka". 1975. (in Russian).

UDC 681.3
SCOPUS CODE 2613

შემთხვევითი პროცესებიდან მესამე რიგის ინტეგრალური პოლინომებისთვის განაწილებათა გამოთვლა ფეინმანის ინტეგრალების გამოყენებით

რევაზ კაკუბავა კომპიუტერული ინჟინერიის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: r.kakubava@gmail.com

გივი ფიფია მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: givififia@yahoo.com

ეკატერინე გულუა გამოთვლითი მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: d_gulua@gtu.ge

რეცენზენტები:

ზ. ქვათაძე, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი
E-mail: zurakvatadze@yahoo.com
ა. კირთაძე, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი
E-mail: kirtadze2@yahoo.com

ანოტაცია. ნაჩვენები იყო სივრცეში მარტივი გადაადგილების შემთხვევაში ინტეგრალებისათვის

„აბსოლუტური უწყვეტობის“ პირობა, რომელიც მიიღება წრფივი და არაწრფივი გარდაქმნით კომპლექსური პარამეტრებიანი გაუსის კვაზიზომის ინტეგრალებიდან.

ადრე მიღებული შედეგების საფუძველზე, ფუნქციონალების განსაზღვრული კლასებისათვის, ნაჩვენებია ფეინმანის ინტეგრალების არსებობა.

ნაშრომში გამოკვლეულია კავშირები და ანალოგიები შემთხვევითი თეორიის პროცესების ამოცანებსა და ფეინმანის ინტეგრალებს შორის.

ფეინმანის ინტეგრალების გამოყენებით გამოკვლეულია შემთხვევითი პროცესებიდან კონკრეტული მესამე რიგის ინტეგრალური პოლინომები. ასეთი პოლინომების მახასიათებელი ფუნქცია წარმოადგენს ვარიაციულ წარმოებულებში შრედინგერის ტიპის დიფერენციალური განტოლების ამონახსნს და გამოისახება ფეინმანის ინტეგრალებით. ფეინმანის ინტეგრალების განსაზღვრის თანახმად, ისინი წარმოადგენენ სასრულჯერადიანი ინტეგრალების ზღვრებს, რაც მიუთითებს მათი გამოთვლის პროცედურას. მიღებული შედეგების დამტკიცება ეყრდნობა ფეინმანის ინტეგრალის განსაზღვრას კონუსურ არეზე.

ნაშრომში აგრეთვე მიღებულია ფეინმანის ინტეგრალების ალბათური გამოყენება. შემთხვევითი პროცესებიდან პოლინომების მახასიათებელი ფუნქციონალების პოვნის ამოცანა დაყვანილია შრედინგერის განტოლების ამოხსნაზე და ამ გზით ნაჩვენებია მათი გამოთვლის პროცედურა.

საკვანძო სიტყვები: განაწილება; ზომადი სივრცე; ზღვრული გადასვლა; ინტეგრალები; კვაზიზომა; მახასიათებელი ფუნქცია; ოპერატორები; შემთხვევითი პროცესი; შუალედის დაყოფა.

UDC 681.3
SCOPUS CODE 2613

Calculation of third-order integral polynomial distributions of random processes using Feynman integrals

Revaz Kakubava Department of Computer Engineering, Georgian Technical University, 77 M. Kostava str, 0160 Tbilisi, Georgia
E-mail: r.kakubava@gmail.com

Givi Pipia Department of Mathematics, Georgian Technical University, 77 M. Kostava str, 0160 Tbilisi, Georgia
E-mail: givififia@yahoo.com

Ekaterine Gulua Departament of Computational Mathematics, Georgian Technical University, 77 M. Kostava str, 0160 Tbilisi, Georgia
E-mail: d_gulua@gtu.ge

Reviewers:

Z. Kvatadze, Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU
E-mail: zurakvatadze@yahoo.com
A. Kirtadze, Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU
E-mail: kirtadze2@yahoo.com

Abstract. The paper refers to the connections and analogies between the problems in the theory of random processes and Feynman integrals. Based on the previously obtained results, the existence of Feynman integrals for a certain class of functionals is shown.

For the simplest case of a shift in space, the "absolute continuity" conditions for the integrals, obtained using linear and nonlinear substitutions from integrals over a Gaussian quasi-measures with a complex parameter, have been found previously.

In this paper we study specifically the third-order integral polynomials of a random process using Feynman integrals. The characteristic function of such polynomials is a solution of the differential equation in the variational derivatives of the Schrödinger type and is expressed in terms of Feynman integrals. By the definition of Feynman integrals, they are finite-multiple limits, which indicate the procedure for calculating them. The proof of the results obtained is based on the introduced concept of the Feynman integral over a conic domain.

In the work, purely probabilistic applications of Feynman integrals are also found. It is possible to reduce to the solution of the Schrödinger equation the determination of the characteristic functionals of polynomials from random processes and indicate the procedure of their calculation in this way.

Key words: Characteristic function; distribution; integrals; limit transition; measurable space; operators; quasi-measure; random process; segment division.

Дата рассмотрения 17.12.2019
Дата поступления 27.12.2019
Подписано к печати 08.07.2020