UDC 621.397.2

SCOPUS CODE 2610

DOI: https://doi.org/10.36073/1512-0996-2019-3-111-120

თერმოდრეკადობის თეორიის სტაციონარული რხევის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის თეორემა

თინათინ კაპანაძე მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: tinatin.kapanaZe@gmail.com

რეცენზენტები:

ს. ხარიბეგაშვილი, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: kharibegashvili@yahoo.com

ლ. ბიწაძე, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის მეცნიერი თანამშრომელი

E-mail: lamarabits@yahoo.com

ანოტაცია. ინტერესს იწვევს თერმოდრეკადობის თეორიის სტაციონარული რხევის (ფსევდორხევის, როცა რხევის სიხშირე $\sigma=\sigma_1+i\sigma_2$. $\sigma_2>0$, $\sigma_1\in R$) ძირითადი, დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანები, როდესაც საზღვარზე მოცემულია $U=(u,w,\omega,v,\theta)^\intercal$ ვექტორის ზღვრული მნიშვნელობა (დირიხლეს ამოცანა), სადაც $u=(u_1,u_2)^\intercal$ გადაადგილების ვექტორია, $w=(w_1,w_2)^\intercal$ – მიკროტემპერატურის ვექტორი, ω – მიკრობრუნვის ფუნქცია, v – მიკროდაჭიმულობის ფუნქცია, θ – ტემპერატურის ცვლილება, $T_0(T_0>0)$ ფიქსირებული ტემპერატურიდან. ნეიმანის ამოცანის შემთხვევაში საზღვარზე მოცემულია განზოგადებული თერმოძაბვის ზღვრული მნიშვნელობა.

ძირითადი დიფერენციალური განტოლებების ერთგვაროვანი სისტემის შესაბამისი გრინის ფორმულების გამოყენებით მტკიცდება დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის თეორემები, კერძოდ ის, რომ თუ დირიხლესა და ნეიმანის როგორც შიგა, ისე გარე ამოცანებს აქვთ ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

საკვანძო სიტყვები: მიკროტემპერატურა; რხევის სიხშირე; სტაციონარული რხევა; ფსევდორხევა.

შესავალი

კლასიკური დრეკადობის მათემატიკური მოდელი არ ითვალისწინებს ტემპერატურულ ცვლილებებს, მაგრამ სხეულის დეფორმაციას თან სდევს ტემპერატურის ცვლილება, ხოლო ტემპერატურის ცვლილებას მაშინაც კი, როცა სხეულზე არ მოქმე-

დებს გარე ძალები, თან სდევს მისი დეფორმაცია. განხილულია დრეკადობის თეორიის ისეთი მოდელი, როცა ტემპერატურული ცვლილების გარდა გათვალისწინებულია სხვადასხვა ველი, კერძოდ მიკროტემპერატურული, მიკრობრუნვის და მიკროდაჭიმულობის ველები.

ნაშრომში განიხილულია სტაციონარული რხევის შემთხვევა, როცა სიხშირე $\sigma=\sigma_1+i\sigma_2$. $\sigma_2>0$, $\sigma_1 \in R$ კომპლექსური პარამეტრია, ე.ი. განიხილულია ფსევდორხევა. შესწავლილია დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის თეორემები. ამ მიზნით მიღებულია მოდელის შესაბამის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემისათვის გრინის ფორმულები, რომელთა საშუალებითაც დამტკიცებულია, რომ თუ დირიხლესა და ნეიმანის, როგორც შიგა, ისე გარე ამოცანებს აქვს ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

ძირითადი ნაწილი

თერმოდრეკადობის თეორიის სტაციონარული რხევის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას, მიკროდაჭიმულობის, მიკროტემპერატურისა და მიკრობრუნვის გათვალისწინებით აქვს შემდეგი სახე [1]

$$[(\mu+\varkappa)\Delta+\rho\sigma^2]u+(\lambda+\mu)graddivu-\varkappa rot\omega+\mu_0 gradv-\beta_0 grad\,\theta=0\,, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&(\varkappa_6+\varkappa_0)w+(\varkappa_4+\varkappa_5)graddivw+i\sigma\mu_1 rot\omega+\\&+i\sigma\mu_2 gradv-\varkappa_3 grad\theta=0\end{aligned} \tag{2}$$

$$(\gamma\Delta+\delta)\omega+2\varkappa\omega+\varkappa rotu-\mu_1 rotw=0 \tag{3}$$

$$(\alpha_0\Delta-\eta_0)v-\mu_0 divu-\mu_2 divw+\beta_1\theta=0\,, \tag{4}$$

$$(\varkappa_7\Delta+i\sigma C)\theta+i\beta_0 T_0\sigma divu+\varkappa_1 divw+i\beta_1 T_0\sigma v=0\,, \tag{5}$$

სადაც Δ არის ლაპლასის ორგანზომილებიანი დიფერენციალური ოპერატორი, $u=(u_1,u_2)^\intercal$ – გადაადგილების ვექტორი, $\intercal$ ტრანსპორტირების სიმბოლოა. $w=(w_1,w_2)^\intercal$ არის მიკროტემპერატურის ვექტორი, ω – მიკრობრუნვის ფუნქცია, v – მიკროდაჭიმულობის ფუნქცია, θ – ტემპერატურის ცვლილება $T_0 (T_0>0)$ ფიქსირებული ტემპერატურიდან, $\sigma=\sigma_1+i\sigma_2$. $\sigma_2>0$, $\sigma_1 \in R$ რხევის სიხშირეა, $c=aT_0$, $\varkappa_0=i\sigma b-\varkappa_2$ $\sigma=I_1\sigma^2-2\varkappa$; $\eta_0^2=I_1\sigma^2-\eta$, $a,b,I,I_1,\gamma,\lambda,\mu,\varkappa,\eta,\beta_0,\beta_1,\mu_0,\mu_1,\mu_2,a_0,\varkappa_j, j=1,2,\dots,7$, ნამდვილი მუდმივებია, რომლებიც განსაზღვრავს სხეულის მექანიკურ და ტემპერატურულ თვისებებს. ეს მუდმივები აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს [1], [2]

$$\begin{aligned}&a_0>0, \mu>0, \eta>0\,, \gamma>0, \varkappa>0, 2\lambda+2\mu+\varkappa-2\mu_0^2>0,\ a_0\gamma-\\&-b_0^2>0,\ \varkappa_7>0, (\varkappa_1+\varkappa_3 T_0)^2\le 4T_0\varkappa_2\varkappa_7\,,\end{aligned} \tag{6}$$

$$\varkappa_6 \pm \varkappa_5 \geq 0, 2\varkappa_4 + \varkappa_5 + \varkappa_6 > 0, \mu + \lambda > 0.$$

(1)–(5) სისტემაში შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$\mathrm{rot} := \left(-\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\top}, \ \mathrm{rot}\omega := \left(-\frac{\partial \omega}{\partial x_2}, \frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^{\top}$$

$$\mathrm{rotu} := \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ \mathrm{rotw} := \frac{\partial w_2}{\partial x_1} - \frac{\partial w_1}{\partial x_2},$$

ამ ტოლობებიდან ვღებულობთ, რომ

$$\mathrm{rotrot}\omega = \Delta\omega, rotrotu = \Delta u - graddivu,$$

$$rotgrad = 0, \ divrot = 0.$$

განზოგადებულ თერმოძაბვის ვექტორს აქვს შემდეგი სახე [1], [3]

$$P(\partial, n)U = (T^{(1)}(\partial, n)U, T^{(2)}(\partial, n)U, T^{(3)}(\partial, n)U, T^{(4)}(\partial, n)U, T^{(5)}(\partial, n)U)^T, \tag{7}$$

სადაც

$$T^{(1)}(\partial, n)U := (2\mu + \varkappa)\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n \, divu - (\mu \, rotu + \varkappa\omega)s + (\mu_0 v - \beta_0 \theta)n \, ,$$

$$T^{(2)}(\partial, n)U := (\varkappa_5 + \varkappa_6)\frac{\partial w}{\partial n} + \varkappa_4 n \, divw - \varkappa_5 s \, rotw \, ,$$

$$T^{(3)}(\partial, n)U := \gamma \frac{\partial \omega}{\partial n} - \mu_1(s \cdot w) - b_0(s \cdot gradv), \tag{8}$$

$$T^{(4)}(\partial, n)U := a_0 \frac{\partial v}{\partial n} - \mu_2(n \cdot w) + b_0(s \cdot grad\omega) \, ,$$

$$T^{(5)}(\partial, n)U := \mu_7 \frac{\partial \theta}{\partial n} + \varkappa_1(n \cdot w).$$

აქ $n = (n_1, n_2)^{\top}, s = (-n_2, n_1)^{\top}, b_o$ გარკვეული მუდმივაა,

$\frac{\partial}{\partial n} = n_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + n_2 \frac{\partial}{\partial x_2}$, არის $n = (n_1, n_2)^{\top}$ ნორმალის მიმართულებით წარმოებული.

ვთქვათ Ω^+ არის ორგანზომილებიანი სასრული არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega$ შეკრული წირით, $\Omega^- = R^2 \backslash \bar{\Omega}^+$.

ამოცანა. ვიპოვოთ $\Omega^+(\Omega^-)$ არეში (1)-(5) სისტემის ისეთი რეგულარული $U = (u, w, \omega, v, \theta)^{\top}$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს:

$(\overset{\sigma}{I})^{\pm}$ (დირიხლეს ამოცანა)

$$\{U(z)\}^+ = f(z), (\{U(z)\}^- = f(z)), \tag{9}$$

$(\overset{\sigma}{II})^{\pm}$ (ნეიმანის ამოცანა)

$$\{P(\partial, n)U(z)\}^+ = f(z) \, , (\{P(\partial, n)U(z)\}^- = f(z)) \, , \tag{10}$$

სადაც

$$f = (f^{(1)}, f^{(2)}, \ f_3, f_4 \, , f_5)^{\top} \, , f^{(j)} = (f_1^{(j)}, f_2^{(j)})^{\top} \, , j = 1,2,$$

$f_k^{(j)}, k, j=1,2, f_l, l=3,4,5$ $\partial\Omega$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z\in\partial\Omega$ წერტილში გავლებული Ω^+ არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი. $P(\partial,n)U$ თერმოძაბვის ვექტორია, რომელიც განსაზღვრულია (7) ფორმულით.

გარე ამოცანების შემთხვევაში, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი უნდა აკმაყოფილებდეს ქრობის შემდეგ პირობებს:

$$U(x)=O(|x|^{-1}), \partial_k U(x)=o(|x|^{-1}), k=1,2\,. \tag{11}$$

თეორემა. თუ $(\overset{\sigma}{I})^{\pm}, (\overset{\sigma}{II})^{\pm}$ ამოცანებს აქვს ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ შესაბამის ერთგვაროვან $(\overset{\sigma}{I})_0^{\pm}$ და $(\overset{\sigma}{II})_0^{\pm}$ $(f(z)=0, z\in\partial\Omega)$ ამოცანებს აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

(1) ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ U ვექტორის კომპლექსურად შეუღლებულ $\overline{U}$ ვექტორზე, (2) ტოლობის კომპლექსურად შეუღლებული გამოსახულება სკალარულად გავამრავლოთ w ვექტორზე,

(3) ტოლობის ორივე მხარე ალგებრულად გავამრავლოთ $\omega(x)$ ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებულ $\overline{\omega}(x)$ ფუნქციაზე, (4) ტოლობის ორივე მხარე ალგებრულად გავამრავლოთ $v(x)$ ფუნქციის კომპლექსურად შეუღლებულ $\bar{v}(x)$ ფუნქციაზე, (5) ტოლობის კომპლექსურად შეუღლებული გამოსახულება სკალარულად გავამრავლოთ $\theta(x)$ ფუნქციაზე და ვაინტეგროთ $\Omega^+(\Omega^-)$ არეზე. თუ ვისარგებლებთ სტოქსის ფორმულით, მივიღებთ

$$\begin{aligned}&\pm\int_{\partial\Omega}\{\overline{u}(z)\cdot T^{(1)}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}ds-\int_{\Omega^{\pm}}[E^{(1)}(\overline{u},u)+\rho\sigma^2|u(x)|^2+\\&+\mu_0 v(x)div\overline{u}(x)-\beta_0\theta(x)div\overline{u}(x)-\varkappa\omega rot\overline{u}(x)]dx=0\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}&\pm\int_{\partial\Omega}\{\overline{w}(z)\cdot T^{(2)}(\partial,n)\overline{U}(z)\}^{\pm}ds-\int_{\Omega^{\pm}}[E^{(2)}(\overline{w},w)-\overline{\varkappa}_0|w(x)|^2+\\&+i\overline{\sigma}\mu_1 w(x)rot\overline{\omega}(x)+i\overline{\sigma}\mu_2 w(x)grad\overline{v}(x)+\varkappa_3 w(x)grad\overline{\theta}(x)]dx=0\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}&\pm\int_{\partial\Omega}\{\overline{\omega}(z)\cdot T^{(3)}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}ds-\int_{\Omega^{\pm}}[\gamma|grad\omega(x)|^2+-\delta|\omega(x)|^2-2\varkappa\omega^2-\\&-\varkappa\overline{\omega}(x)rotu(x)-\mu_1 w(x)rot\overline{\omega}(x)-b_0 gradv(x)rot\overline{\omega}(x)]dx=0\end{aligned} \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\pm\int_{\partial\Omega}\{\overline{v}(z)\cdot T^{(4)}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}ds-\int_{\Omega^{\pm}}[a_0|gradv(x)|^2-\eta_0|v(x)|^2+\\&+\mu_0\overline{v}(x)divu(x)-\beta_1\overline{v}(x)\theta(x)-\mu_2 w(x)grad\overline{v}(x)\cdot rot\omega(x)]dx=0\end{aligned} \tag{15}$$

$$\pm \int_{\partial\Omega} \{\theta(z)\cdot T^{(5)}(\partial,n)\overline{U}(z)\}^{\pm} ds - \int_{\Omega^{\pm}} [\varkappa_7 \,|\, grad\theta(x)|^2 + \varkappa_1 \overline{w}(x) grad\theta(x) +$$
$$+ i\overline{\sigma} c\,|\,\theta(x)|^2 + i\overline{\sigma}\beta_0 T_0 \theta(x) div\overline{u}(x) + i\overline{\sigma}\beta_1 T_0 \theta(x)\overline{v}(x)]dx = 0 \tag{16}$$

სადაც $\overline{U}$-თი აღნიშნულია U ვექტორის კომპლექსურად შეუღლებული ვექტორი. $E^{(1)}(\overline{u},u)$ და $E^{(1)}(\overline{w},w)$ კვადრატული ფორმები მოცემულია შემდეგი ფორმულებით:

$$E^{(1)}(\overline{u},u)dx = \frac{2\lambda+2\mu+\varkappa}{2}|\,divu\,|^2 + \frac{2\mu+\varkappa}{2}\left[\left|\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right|^2 + \right.$$
$$\left. + \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|^2\right] + \frac{x}{2}|\,rotu\,|^2$$

$$E^{(2)}(\overline{w},w) = \frac{2\varkappa_4+\varkappa_5+\varkappa_6}{2}|\,divw\,|^2 + \frac{\varkappa_5+\varkappa_6}{2}\left[\left|\frac{\partial w_1}{\partial x_2}+\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right|^2 + \right.$$
$$\left. + \left|\frac{\partial w_1}{\partial x_1}-\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right|^2\right] + \frac{\varkappa_6-\varkappa_5}{2}|\,rotw\,|^2$$

თუ (12)–(16) ტოლობებში გავითვალისწინებთ $(\overset{\sigma}{I})_0^{\pm}$, $(\overset{\sigma}{II})_0^{\pm}$ ერთგვაროვანი (f(z)=0, $z\in\partial\Omega$) ამოცანების სასაზღვრო პირობებს, კერძოდ

$$\{\overline{U}(z)\}^{\pm}=0,\ \{w(z)\}^{\pm}=0,\ \{\overline{\omega}(z)\}^{\pm}=0, \{\overline{v}(z)\}^{\pm}=0, \{\theta(z)\}^{\pm}=0,$$
$$\{T^{(j)}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}=0,\quad j=1,3,4, T^{(j)}(\partial,n)\overline{U}(z)=0,\ j=2,5,$$

მაშინ $\partial\Omega$ საზღვარზე გავრცელებული ინტეგრალები ტოლი იქნება ნულის, რის გამოც (12)–(16) ტოლობები ასე გადაიწერება:

$$\int_{\Omega^{\pm}} [E^{(1)}(\overline{u},u) + \mu_0 v(x) div\overline{u}(x) - \beta_0\theta(x) div\overline{u}(x) -$$
$$-\rho\sigma^2\,|\,u(x)|^2 - \varkappa\omega(x) rot\overline{u}(x)]dx = 0 \tag{17}$$

$$\int_{\Omega^{\pm}} [E^{(2)}(\overline{w},w) + \overline{\varkappa_0}\,|\,w(x)|^2 + i\overline{\sigma}\mu_1 w(x)\cdot rot\overline{\omega}(x) + i\overline{\sigma}\mu_2 w(x)\cdot grad\overline{v}(x)$$
$$+\varkappa_3 w(x)\cdot grad\overline{\theta}(x)]dx = 0, \tag{18}$$

$$\int_{\Omega^{\pm}} [\gamma\,|\,grad\omega(x)|^2 - \delta\,|\,\omega(x)|^2 - \varkappa\overline{\omega}(x) rotu(x) -$$
$$-\mu_1 w(x)\cdot rot\overline{\omega}(x) - b_0 gradv(x)\cdot rot\overline{\omega}(x)]dx = 0, \tag{19}$$

$$\int_{\Omega^{\pm}}[a_0\,|\,gradv(x)\,|^2-\eta_0\,|\,v(x)\,|^2+\mu_0\overline{v}(x)divu(x)-$$
$$-\beta_1\overline{v}(x)\theta(x)-\mu_2 w(x)\cdot grad\overline{v}(x)-b_0 grad\overline{v}(x)\cdot rot\omega(x)]dx=0 \qquad (20)$$

$$\int_{\Omega^{\pm}}[\varkappa_7\,|\,grad\,\theta(x)\,|^2+\varkappa_1\overline{w}(x)\cdot grad\,\theta(x)+i\overline{\sigma}c\,|\,\theta(x)\,|^2+$$
$$+i\overline{\sigma}\,\beta_0 T_0\theta(x)div\overline{u}(x)+i\overline{\sigma}\beta_1 T_0\theta(x)\overline{v}(x)]dx=0 \qquad (21)$$

(17), (19), (20) განტოლებების ორივე მხარე გავამრავლოთ $i\overline{\sigma}$ –ზე, (21) განტოლების ორივე მხარე კი – $\frac{1}{T_0}$ –ზე და შევკრიბოთ (18) ტოლობასთან ერთად, მივიღებთ:

$$\int_{\Omega^{\pm}}[i\overline{\sigma}E^{(1)}(\overline{u},u)+E^{(2)}(\overline{w},w)-i\overline{\sigma}\sigma^2\rho\,|\,u\,|^2-\varkappa_0\,|\,w\,|^2-i\overline{\sigma}\delta\,|\,\omega\,|^2+$$
$$+i\overline{\sigma}a_0\,|\,gradv\,|^2+\frac{\varkappa_7}{T_0}\,|\,grad\theta\,|^2+i\overline{\sigma}\mu_0(vdiv\overline{u}+\overline{v}divu)-$$
$$-i\overline{\sigma}\varkappa(\omega rot\overline{u}+\overline{\omega}rotu)+\varkappa_3 w\cdot grad\overline{\theta}+\frac{\varkappa_1}{T_0}\overline{w}\cdot grad\theta- \qquad (22)$$
$$-i\overline{\sigma}b_0(grad\overline{v}(x)rot\omega(x)+gradv(x)rot\overline{\omega}(x)$$
$$-i\overline{\sigma}\eta_0\,|\,v\,|^2+\frac{i\overline{\sigma}}{T_0}\,|\,\theta\,|^2-i\overline{\sigma}\gamma\,|\,grad(\omega)\,|^2\,(x)]dx=0$$

შევნიშნოთ, რომ

$$i\overline{\sigma}\sigma^2=(-\sigma_2+i\sigma_1)\,|\,\sigma\,|^2,\ \overline{\varkappa_0}=-(\varkappa_2+\sigma_2 b)-i\sigma_1 b, \qquad (23)$$

(22) ტოლობიდან (23)-ის გათვალისწინებით გამოვყოთ ნამდვილი ნაწილი, მივიღებთ:

$$\int_{\Omega^{\pm}}[\sigma_2 E^{(1)}(\overline{u},u)+E^{(2)}(\overline{w},w)-\rho\sigma_2\,|\,\sigma\,|^2|\,u\,|^2+(\sigma_2 b+\varkappa_2)\,|\,w\,|^2+$$
$$+\sigma_2(I_1\,|\,\sigma\,|^2+2\varkappa)\,|\,\omega\,|^2+\sigma_2 a_0\,|\,gradv\,|^2+\frac{\varkappa_7}{T_0}\,|\,grad\theta\,|^2+$$
$$\sigma_2(I\,|\,\sigma\,|^2+\eta)\,|\,v\,|^2+\frac{\sigma_2 c}{T_0}\,|\,\theta\,|^2+\sigma_2\mu_0(vdiv\overline{u}+\overline{v}divu) \qquad (24)$$
$$+\sigma_2\varkappa(\omega rot\overline{u}+\overline{\omega}rotu)+\frac{\varkappa_1+T_0\varkappa_3}{2T_0}(w\cdot grad\overline{\theta}+\overline{w}\cdot grad\theta)+\sigma_2\gamma\,|\,grad(\omega)\,|^2-$$
$$-b_0 b_0(grad\overline{v}\cdot rot\omega+gradv\cdot rot\overline{\omega}]dx=0$$

მართებულია შემდეგი ტოლობები:

1)

$$2\varkappa\,|\,\omega\,|^2 - \varkappa(\omega rot\bar{u} + \bar{\omega} rotu) + \frac{\varkappa}{2}\,|\,rotu\,|^2 =$$

$$= 2\varkappa\left|\omega - \frac{1}{2}rotu\right|^2 \geq 0,$$

2)

$$\varkappa_2\,|\,w\,|^2 + \frac{\varkappa_1 + T_0\varkappa_3}{2T_0}(w\cdot grad\bar{\theta} + \bar{w}\cdot grad\theta) + \frac{\varkappa_7}{T_0}\,|\,gad\theta\,|^2 =$$

$$= \frac{4\varkappa_2\varkappa_7T_0 - (\varkappa_1 + T_0\varkappa_3)^2}{4T_0\varkappa_7}\,|\,w\,|^2 + \frac{1}{4T_0\varkappa_7}\,|\,2\varkappa_7 grad\theta + (\varkappa_1 + T_0\varkappa_3)w\,|^2 \geq 0,$$

3)

(25)

$$\frac{2\lambda + 2\mu + \varkappa}{2}\,|\,divu\,|^2 + \mu_0(vdiv\bar{u} + \bar{v}divu) + \eta\,|\,v\,|^2 =$$

$$= \frac{(2\lambda + 2\mu + \varkappa)\eta - 2\mu_0^{\ 2}}{2}\,|\,divu\,|^2 + \frac{1}{\eta}\,|\,\eta v + \mu_0 divu\,|^2 \geq 0,$$

4)

$$a_0\,|\,gradv\,|^2 - b_0(gradv\cdot rot\bar{\omega} + grad\bar{v}\cdot rot\omega) +$$

$$+ \gamma grad\omega\,|^2 = \frac{a_0\gamma - b_0^2}{a_0}\,|\,rot\omega\,|^2 + \frac{1}{a_0}\,|\,a_0 gradv + b_0 rot\omega\,|^2 \geq 0,$$

აქ ვისარგებლეთ შემდეგი ტოლობებით:

$$|\,grad\omega\,|^2 = |\,rot\omega\,|^2,$$

$$E^{(1)}(\bar{u},u) = \frac{2\lambda + 2\mu + \varkappa}{2}\,|\,divu\,|^2 + \frac{\varkappa}{2}\,|\,rotu\,|^2 + \tilde{E}^{(1)}(\bar{u},u),$$

(26)

სადაც

$$\tilde{E}^{(1)}(\bar{u},u) = \frac{2\mu + \varkappa}{2}\left[\left|\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right|^2 + \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|^2\right]$$

(25) და (26) ტოლობების გათვალისწინებით (24) ტოლობა შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\int_{\Omega^{\pm}}[\sigma_2\widetilde{E}^{(1)}(\overline{u},u)+E^{(2)}(\overline{w},w)+\rho\sigma_2|\sigma|^2|u|^2+\sigma_2 b|w|^2+$$
$$+\sigma_2|\sigma|^2 I_1|\omega|^2+\sigma_2|\sigma|^2 I|v|^2+\frac{\sigma_2 c}{T_0}|\theta|^2+$$
$$+2\varkappa\sigma_2|\omega-\frac{1}{2}rotu|^2+\frac{4\varkappa_2\varkappa_7 T_0-(\varkappa_1+T_0\varkappa_3)^2}{4T_0\varkappa_7}|w|^2+$$
$$+\frac{1}{4T_0\varkappa_7}|2\varkappa_7 grad\theta+(\varkappa_1+T_0\varkappa_3)w|^2+\frac{\sigma_2}{\eta}|\eta v+\mu_0 divu|^2 \tag{27}$$
$$+\sigma_2\frac{(2\lambda+2\mu+\varkappa)\eta-2\mu_0^2}{2\eta}|divu|^2+\sigma_2\frac{a_0\gamma-b_0^2}{a_0}|rot\omega|^2+$$
$$+\frac{\sigma_2}{a_0}|a_0 gradv+b_0 rot\omega|^2\,dx=0$$

6) უტოლობების თანახმად (27) ინტეგრალის ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არაუარყოფითი სიდიდეა, ამიტომ (27) ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ ინტეგრალქვეშა გამოსახულება ტოლია ნულის, საიდანაც დავასკვენით, რომ:

u(x)=0, w(x)=0, ω(x)=0, v(x)=0, θ(x)=0, x∈ $(\Omega)^{+}(\Omega)^{-}$, რაც იმას ნიშნავს, რომ ერთგვაროვან $(\overset{\sigma}{I})_0^{\pm},(\overset{\sigma}{II})_0^{\pm}$ ამოცანებს აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი, ე.ი. $(\overset{\sigma}{I})^{\pm},(\overset{\sigma}{II})^{\pm}$ ამოცანებს ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

დასკვნა

ნაშრომში გრინის ფორმულების გამოყენებით დამტკიცებულია დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის თეორემები.

ლიტერატურა

1. Iesan D. Thermoelastisity of bodies with microstructure and microtemperatures. International journal of solids and structures. 44(2007) 8648-8662. 2007.
2. Iesan D. On a theory of micromorfic elastic solids with microtemperatures. Journal of thermal stresses. 24(8). 2001.
3. Giorgashvili L., Zazashvili S., Mathematical problems of thermoelasticity of bodies with microstructure and microtemperature. Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute. V.172. Issue 1. 2018, 30-57 pp. (in Georgian).
4. Bitsadze L., Jaiani G. Theorems for the third and fourth BVPs of 2D theory of thermoelasticity with microtemperatures. Nova Science Publishers, Inc. QA431.M.36. 2012, 99-118 pp.

UDC 621.397.2
SCOPUS CODE 2610
DOI: https://doi.org/10.36073/1512-0996-2019-3-111-120

The Uniqueness Theorem of the boundary value problems for the stationary oscillations of the Theory of Thermoelasticity

Tinatin Kapanadze Department of Mathematics, Georgian Technical University, 77 M. Kostava str, 0160 Tbilisi, Georgia
E-mail: tinatin.kapanaZe@gmail.com

Reviewers:

S. Kharibegashvili, Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU
E-mail: kharibegashvili@yahoo.com

L. Bitsadze, Research Scientist, Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University
E-mail: lamarabits@yahoo.com

Abstract. We consider the stationary oscillations of the micro-stretch materials with microstructure and microtemperatures. The representation formula of a general solution of the homogeneous system of differential equations obtained in the paper is expressed by means of seven metaharmonic functions. These formulas are very convenient in many particular problems for domains with concrete geometry.

Key words: Microtemperature; oscillation frequency; pseudo oscillation; stationary oscillation.

UDC 621.397.2
SCOPUS CODE 2610
DOI: https://doi.org/10.36073/1512-0996-2019-3-111-120

Теорема единственности решений граничных задач стационарного колебания теории термоупругости

Тинатин Капанадзе Департамент математики, Грузинский технический университет, Грузия, 0160, Тбилиси, ул. М. Костава, 77
E-mail: tinatin.kapanaZe@gmail.com

Рецензенты:

С. Харибегашвили, профессоор факультета информатики и систем управления ГТУ
E-mail: kharibegashvili@yahoo.com

Л. Бицадзе, научный сотрудник Института прикладной математики им. И. Векуа
E-mail: lamarabits@yahoo.com

Аннотация. В работе рассматриваются основные граничные задачи стационарных колебаний теории термоупругости (псевдо -колебаний, когда частота колебаний $\sigma=\sigma_1+i\sigma_2$. $\sigma_2>0$, $\sigma_1\in R$), когда на границе задано предельное значение вектора $U=(u,w,\omega,v,\theta)^{\top}$ (задача Дирихле), где $u(x)$ –вектор перемещения, $w=(w_1,w_2)^{\top}$ – вектор микротемпературы, $\omega\ (x)$ - функция микровращений, $v(x)$ – функция микрорастяжений, $\theta(x)$ – функция температуры тела. В случае задачи Неймана на границе задано предельное значение обобщенного термонапряжения.

В работе получены формулы Грина для системы однородных дифференциальных уравнений. С помощью этих формул доказаны теоремы единственности граничных задач Дирихле и Неймана. В частности доказано, что, если задача Дирихле и Неймана имеют решение, то оно единственно.

Ключевые слова: микротемпература; псевдоколебание; стационарное колебание; частата колебаний.

განხილვის თარიღი 01.04.2019
შემოსვლის თარიღი 27.05.2019
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 24.10.2019