UDC 536.7
SCOPUS CODE 2610
DOI: https://doi.org/10.36073/1512-0996-2019-3-121-132

თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები სხვადასხვა ველის გათვალისწინებით

სალომე ბიწაძე
მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: Sali.bitsadze28@gmail.com

რეცენზენტები:
ს. ხარიბეგაშვილი, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი
E-mail: kharibegashvili@yahoo.com
ი. ცაგარელი, ი. ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტის მეცნიერი თანამშრომელი
E-mail: I.Tsagareli@yahoo.com

ანოტაცია. ტემპერატურული ველისა და დეფორმაციის ველის სხვადასხვა პირობის გათვალისწინებით ვღებულობთ დრეკადობის თეორიის სხვადასხვა მოდელს, კერძოდ თერმოდრეკადობის მოდელს. საინტერესოა თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ძირითადი სასაზღვრო ამოცანები, კერძოდ დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანები. დირიხლეს ამოცანის შემთხვევაში საზღვარზე მოცემულია გადაადგილების ვექტორის, მიკროტემპერატურის ვექტორის, მიკრობრუნვის, მიკროდაჭიმულობისა და ტემპერატურული ცვლილების ფუნქციების ზღვრული მნიშვნელობები, ხოლო ნეიმანის ამოცანის შემთხვევაში საზღვარზე მოცემულია განზოგადებული თერმოძაბვის ზღვრული მნიშვნელობები. მიღებულია ძირითადი დიფერენციალური განტოლებების ერთგვაროვანი სისტემის შესაბამისი გრინის ფორმულები. გრინის ფორმულების გამოყენებით დამტკიცებულია დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის თეორემები. კერძოდ დამტკიცებულია, რომ თუ დირიხლეს როგორც შიგა და გარე ამოცანებს, ისე ნეიმანის გარე ამოცანას აქვს ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია. რაც შეეხება ნეიმანის შიგა ამოცანას, მისი ამონახსნი განისაზღვრება გარკვეული ვექტორის შესაკრების სიზუსტით.

საკვანძო სიტყვები: მიკრობრუნვა; მიკროდაჭიმულობა; მიკროტემპერატურა; ტემპერატურული ცვლილება.

შესავალი

ნაშრომში განხილულია თერმოდრეკადობის თეორიის ის მოდელი, რომლის დეფორმაცია დაკავშირებულია მიკროტემპერატურული, მიკრო-

ბრუნვის, მიკროდაჭიმულობის ველების ზემოქმედებაზე. ამ მოდელის შესაბამისი დიფერენციალური განტოლებების სისტემისათვის შესწავლილია დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის საკითხები, რაც ფრიად დიდი თეორიული ინტერესის საგანია ამ ამოცანების კორექტულობის შესწავლის თვალსაზრისით. მიღებულია სხვადასხვა ველის გათვალისწინებით თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვანი სისტემისათვის გრინის ფორმულები. ამ ფორმულების გამოყენებით დამტკიცებულია დირიხლესა და ნეიმანის როგორც შიგა, ისე გარე ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის თეორემები. კერძოდ ნაჩვენებია, რომ, თუ დირიხლეს როგორც შიგა, ისე გარე ამოცანებს, ასევე ნეიმანის გარე ამოცანას აქვს ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია. თუ ნეიმანის შიგა ამოცანას აქვს ამონახსნი, მაშინ იგი განისაზღვრება გარკვეული ვექტორის შესაკრების სიზუსტით.

ძირითადი ნაწილი

თერმოდრეკადობის თეორიის სტატისტიკის დიფერენციალურ განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას მიკროდაჭიმულობის, მიკროტემპერატრისა და მიკრობრუნვის გათვალისწინებით აქვს შემდეგი სახე [1]

$$
\begin{gathered}
(\mu+\varkappa)\Delta u+(\lambda+\mu)graddivu-\varkappa rot\omega+\mu_0 gradv-\beta_0 grad\theta=0\,,\\
\varkappa_6\Delta w-\varkappa_2 w+(\varkappa_4+\varkappa_5)graddivw-\varkappa_3 grad\theta=0\,,\ \gamma\Delta\omega-2\varkappa\omega+\varkappa rotu-\mu_1 rotw=0,\\
a_0\Delta v-\eta v-\mu_0 divu-\mu_2 divw+\beta_1\theta=0\,,\varkappa_7\Delta\theta+\varkappa_1 divw=0\,,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

სადაც Δ არის ლაპლასის ორგანზომილებიანი დიფერენციალური ოპერატორი, $u=(u_1,u_2)^\intercal$ – გადაადგილების ვექტორი, $w=(w_1,w_2)^\intercal$ – მიკროტემპერატურის ვექტორი, $\intercal$ ტრანსპორტირების სიმბოლოა, ω – მიკრობრუნვის ფუნქცია, v – მიკროდაჭიმულობის ფუნქცია, θ – ტემპერატურის ცვლილება $T_0(T_0>0)$ ფიქსირებული ტემპერატურიდან.

$\gamma,\lambda,\mu,\varkappa,\eta,\beta_0,\beta_1,\mu_0,\mu_1,\mu_2,a_0,\varkappa_j,j=1,2,\dots,7$ ნამდვილი მუდივებია, რომლებიც განსაზღვრავს სხეულის მექანიკურ და ტემპერატურულ თვისებებს. ეს მუდმივები აკმაყოფილებს შემდეგ უტოლობებს: [1], [2]

$$
\begin{gathered}
a_0>0,\mu>0,\eta>0\,,\gamma>0,\varkappa>0,2\lambda+2\mu+\varkappa-2\mu_0^2>0,a_0\gamma-b_0^2>0,\varkappa_7>0,(\varkappa_1+\varkappa_3T_0)^2\le\\
4T_0\varkappa_2\varkappa_7\,,\varkappa_6\pm\varkappa_5\ge0,2\varkappa_4+\varkappa_5+\varkappa_6>0.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

(1) სისტემაში შემოღებულია შემდეგი აღნიშვნები:

$$
\begin{gathered}
rot:=\left(-\frac{\partial}{\partial x_2},\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^\intercal,rot\omega:=\left(-\frac{\partial\omega}{\partial x_2},\frac{\partial\omega}{\partial x_1}\right)^\intercal,\\
rotu:=\frac{\partial u_2}{\partial x_1}-\frac{\partial u_1}{\partial x_2},rotw=\frac{\partial w_2}{\partial x_1}-\frac{\partial w_1}{\partial x_2}.
\end{gathered}
$$

ISSN 1512-0996
www.shromebi.gtu.ge

ვთქვათ Ω^+ არის ორგანზომილებიანი სასრული არე, რომელიც შემოსაზღვრულია $\partial\Omega$ შეკრული წირით, $\Omega^- = R^2 \setminus \bar{\Omega}^+$.

ამოცანა. ვიპოვოთ $\Omega^+(\Omega^-)$ არეში (1) სისტემის ისეთი რეგულარული $U=(u,w,\omega,v,\theta)^\intercal$ ამონახსნი, რომელიც $\partial\Omega$ საზღვარზე აკმაყოფილებს შემდეგი სასაზღვრო პირობებიდან ერთ-ერთს

$(\mathrm{I})^\pm$ (დირეიხლეს ამოცანა):

$$\{U(z)\}^+ = f(z), \left(\{U(z)\}^- = f(z)\right), \tag{3}$$

$(\mathrm{II})^\pm$ (ნეიმანის ამოცანა)

$$\{P(\partial,n)U(z)\}^+ = f(z)\,, \left(\{P(\partial,n)U(z)\}^- = f(z)\right), \tag{4}$$

სადაც

$$f = (f^{(1)}, f^{(2)}, f_3, f_4, f_5)^\intercal\,, f^{(j)} = (f_1^{(j)}, f_2^{(j)})^\intercal\,, j = 1,2,$$

$f_k^{(j)}, k\,, j = 1,2\,, f_l, l = 3,4,5$ $\partial\Omega$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(z)$ არის $z \in \partial\Omega$ წერტილში გავლებული Ω^+ არის მიმართ გარე ნორმალის ორტი. $P(\partial,n)U$ თერმოძაბვის ვექტორია, რომელსაც აქვს შემდეგი სახე [1], [3]

$$P(\partial,n)U = \left(T^{(1)}(\partial,n)U, T^{(2)}(\partial,n)U, T^{(3)}(\partial,n)U, T^{(4)}(\partial,n)U, T^{(5)}(\partial,n)U\right)^\intercal, \tag{5}$$

სადაც

$$T^{(1)}(\partial,n)U \coloneqq (2\mu+\varkappa)\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda n\, div u - (\mu\, rot u + \varkappa\omega)s + (\mu_0 v - \beta_0\theta)n\,,$$

$$T^{(2)}(\partial,n)U \coloneqq (\varkappa_5+\varkappa_6)\frac{\partial w}{\partial n} + \varkappa_4 n\, div w - \varkappa_5 s\, rot w\,,$$

$$T^{(3)}(\partial,n)U \coloneqq \gamma\frac{\partial \omega}{\partial n} - \mu_1(s\cdot w) - b_0(s\cdot grad v),$$

$$T^{(4)}(\partial,n)U \coloneqq a_0\frac{\partial v}{\partial n} - \mu_2(n\cdot w) + b_0(s\cdot grad\omega)\,,$$

$$T^{(5)}(\partial,n)U \coloneqq \mu_7\frac{\partial\theta}{\partial n} + \varkappa_1(n\cdot w). \tag{6}$$

აქ $n=(n_1,n_2)^\intercal, s=(-n_2,n_1)^\intercal, b_o$ გარკვეული მუდმივაა,

$\frac{\partial}{\partial n} = n_1\frac{\partial}{\partial x_1} + n_2\frac{\partial}{\partial x_2}$, არის $n=(n_1,n_2)^\intercal$ ნორმალის მიმართულებით წარმოებული.

გარე ამოცანების შემთხვევაში, უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი უნდა აკმაყოფილებდეს ქრობის შემდეგ პირობებს:

$$U(x) = O(|x|^{-1}), \partial_k U(x) = o(|x|^{-1}), k = 1,2\,. \tag{7}$$

თეორემა 1. თუ $(I)^\pm$ და $(II)^-$ ამოცანებს აქვს ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება თუ ვაჩვენეთ, რომ შესაბამის ერთგვაროვან $(I)_0^\pm$, $(II)_0^-$ $(f(z)=0, z\in\partial\Omega)$ ამოცანებს აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

(1) სისტემის პირველი და მეორე განტოლებების ორივე მხარე გავამრავლოთ შესაბამისად u და w ვექტორებზე სკალარულად, ხოლო მესამე, მეოთხე და მეხუთე განტოლებების ორივე მხარე ალგებრულად გავამრავლოთ შესაბამისად ω, v, θ ფუნქციებზე და ვაინტეგროთ Ω^+ (Ω^-) არეზე. თუ ვისარგებლებთ სტოქსის ფორმულით, საბოლოოდ მივიღებთ გრინის შემდეგ ფორმულებს:

$$\pm\int_{\partial\Omega}\{u(z)\cdot T^{(1)}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}ds-\int_{\Omega^{\pm}}[E^{(1)}(u,u)+\mu_0 v\,divu-\beta_0\theta divu-\varkappa\omega rotu]dx=0,\tag{8}$$

$$\pm\int_{\partial\Omega}\{w(z)\cdot T^{(2)}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}ds-\int_{\Omega^{\pm}}[E^{(2)}(w,w)+\varkappa_2 w^2+\varkappa_3 w\cdot grad\theta]dx=0,\tag{9}$$

$$\pm\int_{\partial\Omega}\{\omega(z)\cdot T^{(3)}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}ds-\int_{\Omega^{\pm}}[\gamma(grad\omega)^2+2\varkappa\omega^2-\varkappa\omega rotu-\mu_1 w\cdot rot\omega-b_0 gradv\cdot rot\omega]dx=0,\tag{10}$$

$$\pm\int_{\partial\Omega}\{v(z)\cdot T^{(4)}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}ds-\int_{\Omega^{\pm}}[a_0(gradv)^2+\eta v^2+\mu_0 v\,divu-\beta_1 v\theta-\mu_2 w\cdot gradv-b_0 gradv\cdot rot\omega]dx=0,\tag{11}$$

$$\pm\int_{\partial\Omega}\{\theta(z)\cdot T^{(5)}(\partial,n)U(z)\}^{\pm}ds-\int_{\Omega^{\pm}}[\varkappa_7(grad\theta)^2+\varkappa_1 w\cdot grad\theta]dx=0,\tag{12}$$

სადაც $T^{(j)}(\partial,n)U,\ j=1,2,...,5$ ძაბვები მოცემულია (6) ფორმულებით, ხოლო $E^{(1)}(u,u)$ და $E^{(2)}(w,w)$ კვადრატულ ფორმებს აქვს შემდეგი სახე: [4]

$$E^{(1)}(u,u)=\left(\lambda+\mu+\frac{\varkappa}{2}\right)(divu)^2+\frac{2\mu+\varkappa}{2}\left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right]+\frac{\varkappa}{2}(rotu)^2,\tag{13}$$

$$E^{(2)}(w,w)=\frac{2\varkappa_4+\varkappa_5+\varkappa_6}{2}(divw)^2+\frac{\varkappa_5+\varkappa_6}{2}\left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_2}+\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial w_1}{\partial x_1}-\frac{\partial w_2}{\partial x_2}\right)\right]^2+\frac{\varkappa_6-\varkappa_5}{2}(rotw)^2.$$

თუ (8)–(12) ტოლობებში გავითვალისწინებთ $(I)_0^{\pm}$ და $(II)_0^{\pm}$ ამოცანების ერთგვაროვან სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ, რომ ამ ფორმულაში შემავალი წირითი ინტეგრალები ნულის ტოლია. ამრიგად გვექნება:

$$\int_{\Omega^{\pm}}[E^{(1)}(u,u)+\mu_0 v\,divu-\beta_0\theta divu-\varkappa\omega rotu]dx=0,\tag{14}$$

$$\int_{\Omega^{\pm}}[E^{(2)}(w,w)+\varkappa_2 w^2+\varkappa_3 w\cdot grad\,\theta]dx=0, \tag{15}$$

$$\int_{\Omega^{\pm}}[\gamma(grad\,\omega)^2+2\varkappa\omega^2-\varkappa\omega rotu-\mu_1 w\cdot rot\,\omega-b_0 gradv\cdot rot\,\omega]dx=0, \tag{16}$$

$$\int_{\Omega^{\pm}}[a_0(gradv)^2+\eta v^2+\mu_0 vdivu-\beta_1 v\theta-\mu_2 w\cdot gradv- \\ -b_0 gradv\cdot rot\omega]dx=0, \tag{17}$$

$$\int_{\Omega^{\pm}}[\varkappa_7(grad\theta)^2+\varkappa_1 w\cdot grad\theta]dx=0. \tag{18}$$

(15) ტოლობის ორივე მხარე გავამრავლოთ T_0-ზე და შევკრიბოთ (18) ტოლობასთან, მივიღებთ:

$$\int_{\Omega^{\pm}}[T_0E^{(2)}(w,w)+\varkappa_2T_0w^2+(\varkappa_1+T_0\varkappa_3)(w\cdot grad\theta)+ \\ +\varkappa_7(grad\theta)^2]dx=0. \tag{19}$$

(2) უტოლობების გათვალისწინებით ვღებულობთ:

$$\varkappa_2T_0w^2+(\varkappa_1+T_0\varkappa_3)(w\cdot grad\theta)+\varkappa_7(grad\theta)^2=$$
$$=\frac{4T_0\varkappa_2\varkappa_7-(\varkappa_1+T_0\varkappa_3)^2}{4\varkappa_7}w^2+\frac{1}{4\varkappa_7}[(\varkappa_1+T_0\varkappa_3)w+2\varkappa_7 grad\theta]^2\geq 0.$$

თუ ამ ტოლობას გავითვალისწინებთ (19)-ში, მივიღებთ:

$$\int_{\Omega^{\pm}}[T_0E^{(2)}(w,w)+\frac{4T_0\varkappa_2\varkappa_7-(\varkappa_1+T_0\varkappa_3)^2}{4\chi_7}w^2+ \\ +\frac{1}{4\varkappa_7}((\varkappa_1+T_0\varkappa_3)w+2\varkappa_7 grad\theta)^2]\ dx=0.$$

ვინაიდან ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არაუარყოფითი გამოსახულებაა, ამიტომ უკანასკნელი ტოლობიდან ვღებულობთ:

$$E^{(2)}(w,w.)=0, w(x)=0, grad\theta(x)=0, x\in\Omega^{\pm}.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ

$$w(x)=0,\ \theta(x)=c=const, x\in\Omega^{\pm}. \tag{20}$$

ვინაიდან $(I)_0^{\pm}$ ამოცანის შემთხვევაში $\{\theta(z)\}^{\pm}=0$, ხოლო $(\mathrm{II})_0^{-}$ ამოცანის შემთხვევაში $\lim_{|x|\to\infty}\theta(x)=0$, ამიტომ (20)-დან ვღებულობთ, რომ $c=0$, ე.ი.

$$w(x)=0,\ \ \theta(x)=0,\ \ x\in\Omega^{\pm}. \tag{21}$$

თუ ამ ტოლობებს გავითვალისწინებთ (14), (16) და (17) ტოლობებში და შევკრებთ, მივიღებთ:

$$\int_{\Omega^{\pm}}[E^{(1)}(u,u)+\gamma(grad\omega)^2+a_0(gradv)^2+2\varkappa\omega^2+ \\ +\eta v^2+2\mu_0 vdivu-2\varkappa\omega rotu-2b_0 gradv\cdot rot\omega]dx=0. \tag{22}$$

$E^{(1)}(u,u)$ კვადრატული ფორმა წარმოვადგინოთ ასე:

$$E^{(1)}(u,u)=\widetilde{E}^{(1)}(u,u)+\frac{\varkappa}{2}(rotu)^2+(\lambda+\mu+\frac{\varkappa}{2})(divu)^2, \tag{23}$$

სადაც

$$\widetilde{E}^{(1)}(u,u)=\frac{2\mu+\varkappa}{2}+\left[\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^2\right]\geq 0.$$

თუ $E^{(1)}(u,u)$ -ის მნიშვნელობას (23)-დან შევიტანთ (22)-ში, მაშინ იგი შეგვიძლია ასე გადავწეროთ:

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega^\pm}\{\widetilde{E}^{(1)}(u,u)+2\varkappa(\omega\ -\frac{1}{2}rotu)^2+\\&+\left[(\lambda+\mu+\frac{\varkappa}{2})(divu)^2+2\mu_0 vdivu+\eta v^2\right]+\\&+\left[a_0(gradv)^2-2b_0(gradv\cdot rot\omega)+\gamma(rot\omega)^2\right]\}dx=0.\end{aligned} \tag{24}$$

აქ ვისარგებლეთ $(gradv)^2=(rot\omega)^2$ იგივეობით.

შევნიშნოთ, რომ

$$\begin{aligned}&(\lambda+\mu+\frac{\varkappa}{2})(divu)^2+2\mu_0 vdivu+\eta v^2=\frac{(2\lambda+2\mu+\varkappa)\cdot\eta-2\mu_0^2}{2\eta}(divu)^2+\\&+\frac{1}{\eta}(\mu_0 divu+\eta v)^2\geq 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&a_0(gradv)^2-2b_0(gradv\cdot rot\omega)+\gamma(rot\omega)^2=\\&=\frac{a_0\gamma-b_0^2}{a_0}(rot\omega)^2+\frac{1}{a_0}(b_0 rot\omega-a_0 gradv)^2\geq 0.\end{aligned}$$

თუ ამ ტოლობებს გავითვალისწინებთ (24)-ში, მივიღებთ, რომ (24)-ში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არაუარყოფითია, რის გამოს (24) ტოლობიდან ვღებულობთ, რომ ინტეგრალქვეშა ფუნქცია ნულის ტოლია, ე.ი.

$$\widetilde{E}^{(1)}(u,u)=0,\omega-\frac{1}{2}rotu=0,divu=0,rot\omega=0,v=0,$$

ამ ტოლობებიდან ვღებულობთ, რომ

$$u(x)=b\widetilde{x}+d,\omega(x)=b,\ v(x)=0,\ \ x\in\Omega^\pm, \tag{25}$$

სადაც $d=(d_1,d_2)^\intercal, d_1, d_2, b$ ნებისმიერი მუდმივებია. ვინაიდან $(I)_0^\pm$ ამოცანის შემთხვევაში $\{u(z)\}^\pm=0,\ \ \{\omega(z)\}^\pm=0,$ ხოლო $(II)_0^-$ ამოცანის შემთხვევაში $u(x)=o(|x|^{-1}),\omega(x)=o(|x|^{-1}),$ ამიტომ (25)-დან ვღებულობთ $b=0,\ d=0$, ე.ი. $u(x)=0,\ \ \omega(x)=0, v(x)=0, x\in\Omega^\pm$, რაც იმას ნიშნავს, რომ $(I)^\pm$ და $(II)^-$ ამოცანებს ერთადერთი ამონახსნი აქვს.

თეორემა 2. თუ $(II)^{+}$ ამოცანას აქვს ამონახსნი, მაშინ იგი განისაზღვრება შემდეგი ვექტორის სიზუსტით:

$$U^{(0)}(x) = (b\tilde{x} + p'cx + d, 0, b, q'c, c)^{\top}, \tag{26}$$

სადაც b და c ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია. $d = (d_1, d_2)$ ორგანზომილებიანი ნამდვილი მუდმივი ვექტორია, ხოლო

$$p' = \frac{\eta\beta_0 - \mu_0\beta_1}{(2\lambda+2\mu+\varkappa)\eta - 2\mu_0^2}\,, q' = \frac{\beta_1(2\lambda+2\mu+\varkappa) - 2\mu_0\beta_0}{(2\lambda+2\mu+\varkappa)\eta - 2\mu_0^2}. \tag{27}$$

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება თუ ვაჩვენებთ, რომ შესაბამის $(II)_0^{+}$ ერთგვაროვან ამოცანას აქვს ერთადერთი ამონახსნი, რომელიც გამოისახება (26) ფორმულით.

ვთქვათ $U = (u, w, \omega, v, \theta)^{\top}$ ვექტორი არის ნეიმანის ერთგვაროვანი $(II)_0^{+}$ ამოცანის რეგულარული ამონახსნი. თუ გავიმეორებთ თეორემაში ჩატარებულ მსჯელობას, მივიღებთ:

$$w(x) = 0, \quad \theta(x) = c = const, \quad x \in \Omega^{+}, \tag{28}$$

სადაც c ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივაა.

$(II)_0^{+}$ ამოცანის შემთხვევაში $c \neq 0$.

თუ (28) ტოლობებს გავითვალისწინებთ (1) სისტემის პირველ, მესამე და მეოთხე განტოლებებში, მივიღებთ:

$$(\mu + \varkappa)\Delta u + (\lambda + \mu) graddivu + \varkappa rot\omega + \mu_0 gradv = 0\,, \tag{29}$$

$$\lambda\Delta\omega - 2\varkappa\omega + \varkappa rotu = 0\,, \tag{30}$$

$$a_0\Delta v - \eta v - \mu_0 divu + \beta_1 c = 0\,. \tag{31}$$

(28) ტოლობების გათვალისწინებით $T^{(1)}(\partial, n)U$ ძაბვის ვექტორი გადავწეროთ ასე:

$$T^{(1)}(\partial, n)U = (2\mu + \varkappa)\frac{\partial u}{\partial n} + \lambda ndivu - \mu srotu - \varkappa s\omega + (\mu_0 v - \beta_0 c)n. \tag{32}$$

შემოვიღოთ ახალი $\tilde{u}$ ვექტორი და $\tilde{v}$ ფუნქცია შემდეგნაირად

$$\tilde{u} = u - p'cx, \quad \tilde{v} = v - q'c, \tag{33}$$

სადაც p' და q' სიდიდეებს აქვს (27) სახე.

(33) აღნიშვნების საფუძველზე (29)–(31) განტოლებები გადაიწერება ასე:

$$(\mu + \varkappa)\Delta\tilde{u} + (\lambda + \mu) graddiv\,\tilde{u} - \varkappa rot\,\omega + \mu_0 grad\,\tilde{v} = 0, \tag{34}$$

$$\gamma\Delta\omega - 2\varkappa\omega + \varkappa rot\tilde{u} = 0, \tag{35}$$

$$a_0\Delta\tilde{v} - \eta\tilde{v} - \mu_o\tilde{u} = 0. \tag{36}$$

თუ (6)-ის მესამე, მეოთხე და (32) ტოლობებში გავითვალისწინებთ (33) აღნიშვნებს, მივიღებთ:

$$\{T^{(1)}(\partial,n)\widetilde{U}(z)\}^{+}=\{(2\mu+\varkappa)\frac{\partial\widetilde{u}}{\partial n}+\lambda n div\widetilde{u}-\mu s rot\widetilde{u}- \\ -\varkappa s\omega+\mu_0\widetilde{v}n\}^{+}=0,\ z\in\partial\Omega, \tag{37}$$

$$\{T^{(3)}(\partial,n)\widetilde{U}(z)\}^{+}=\{\gamma\frac{\partial\omega}{\partial n}-b_0(s\cdot grad\widetilde{v})\}^{+}=0,\ \ z\in\partial\Omega, \tag{38}$$

$$\{T^{(4)}(\partial,n)\widetilde{U}(z)\}^{+}=\{a_0\frac{\partial v}{\partial n}+b_0(s\cdot grad\omega)\}^{+}=0,\ \ z\in\partial\Omega, \tag{39}$$

სადაც $\widetilde{U}=(\tilde{u},\omega,\tilde{v})^{\intercal}$.

(29) ტოლობის ორივე მხარე სკალარულად გავამრავლოთ $\tilde{u}$–ზე, ხოლო (30) და (31) ტოლობების ორივე მხარე ალგებრულად გავამრავალოთ შესაბამისად ω და $\tilde{v}$ ფუნქციებზე, შევკრიბოთ ეს ტოლობები და ვაინტეგროთ Ω^+ არეზე, მივიღებთ:

$$\int_{\partial\Omega}\{\widetilde{u}(z)T^{(1)}(\partial,n)\widetilde{U}(z)+\omega(z)T^{(3)}(\partial,n)\widetilde{U}(z)+\widetilde{v}(z)T^{(4)}(\partial,n)\widetilde{U}(z)\}^{+}ds- \\ -\int_{\Omega+}\left[\widetilde{E}^{(1)}(\widetilde{u},\widetilde{u})+2\varkappa\left(\omega-\frac{1}{2}rot\widetilde{u}\right)^2+\frac{(2\lambda+2\mu+\varkappa)\eta-2\mu_0^2}{2\eta}(div\widetilde{u})^2+ \right. \\ +\frac{1}{\eta}(\mu_0 div\widetilde{u}+\eta\widetilde{v})^2+\frac{a_0\gamma-b_0^2}{a_0}(rot\omega)^2+\frac{1}{a_0}(b_0 rot\omega- \\ \left. -a_0 grad\widetilde{v})^2\right]dx=0,$$

სადაც

$$\widetilde{E}^{(1)}(\widetilde{u},\widetilde{u})=\frac{2\mu+\varkappa}{2}\left[\left(\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_1}+\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial\widetilde{u}_1}{\partial x_1}-\frac{\partial\widetilde{u}_2}{\partial x_2}\right)^2\right]. \tag{40}$$

თუ (40) ტოლობაში გავითვალისწინებთ, რომ $\{T^{(j)}(\partial,n)\widetilde{U}(z)\}^{+}=0,\ \ j=1,3,4,\ z\in\partial\Omega,$ მაშინ მივიღებთ:

$$\int_{\Omega+}\left[\widetilde{E}^{(1)}(\widetilde{u},\widetilde{u})+2\varkappa\left(\omega-\frac{1}{2}rot\widetilde{u}\right)^2+\frac{(2\lambda+2\mu+\varkappa)\eta-2\mu_0^2}{2\eta}(div\widetilde{u})^2+ \right. \\ +\frac{1}{\eta}(\mu_0 div\widetilde{u}+\eta\widetilde{v})^2+\frac{a_0\gamma-b_0^2}{a_0}(rot\omega)^2+\frac{1}{a_0}(b_0 rot\omega- \\ \left. -a_0 grad\widetilde{v})^2\right]dx=0. \tag{41}$$

ვინაიდან (41) ტოლობაში ინტეგრალქვეშა ფუნქცია არაუარყოფითი სიდიდეა, ამიტომ

$$\widetilde{E}^{(1)}(\widetilde{u},\widetilde{u})=0,\ \omega-\frac{1}{2}rot\widetilde{u}=0,\quad div\widetilde{u}=0,\ \widetilde{v}=0, \\ rot\omega=0,\quad grad\widetilde{v}=0.$$

აქედან ვღებულობთ, რომ

$$u(x)=b\tilde{x}+d,\omega(x)=b,\tilde{v}(x)=0,x\in\Omega^{+}.$$

თუ ამ ტოლობებს გავითვალისწინებთ (33)-ში, მივიღებთ:

$$u(x)=b\tilde{x}+d+p'cx,\quad \omega(x)=b,\quad v(x)=q'c, \tag{42}$$

სადაც $d=(d_1,d_2)^{\intercal}$ d_1,d_2,b და c ნებისმიერი ნამდვილი მუდმივებია.

ამრიგად, (28) და (42) ტოლობების თანახმად $(II)_0^+$ ერთგვაროვანი ამოცანის ამონახსნია

$$U^{(0)}(x) = (b\tilde{x} + p'cx + d, 0, b, q'c, c)^{\top},$$

სადაც p' და q' სიდიდეებს აქვთ (27) სახე. ამით თეორემა დამტკიცებულია.

დასკვნა

ნაშრომში გრინის ფორმულების გამოყენებით დამტკიცებულია თერმოდრეკადობის თეორიის სტატიკის ძირითადი (დირიხლესა და ნეიმანის) სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნის ერთადერთობის თეორემები.

ლიტერატურა

1. Iesan D. Thermoelastisity of bodies with microstructure and microtemperatures. International journal of solids and structures. 44(2007) 8648-8662. 2007.
2. Iesan D. On a theory of micromorfic elastic solids with microtemperatures. Journal of thermal stresses. 24(8). 2001.
3. Giorgashvili L., Zazashvili S., Mathematical problems of thermoelasticity of bodies with microstructure and microtemperature. Transactions of A. Razmadze Mathematical Institute. V.172. Issue 1. 2018, 30-57 pp. (in Georgian).
4. Bitsadze L., Jaiani G. Theorems for the third and fourth BVPs of 2D theory of thermoelasticity with microtemperatures. Nova Science Publishers, Inc. QA431.M.36. 2012, 99-118 pp.

UDC 536.7
SCOPUS CODE 2610
DOI: https://doi.org/10.36073/1512-0996-2019-3-121-132

Basic boundary value problems of statics of Thermoelasticity theory considering different field

Salome Bitsadze Department of Mathematics, Georgian Technical University, 77 M. Kostava str, 0160 Tbilisi, Georgia
E-mail: Sali.bitsadze28@gmail.com

Reviewers:

S. Kharibegashvili, Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU
E-mail: kharibegashvili@yahoo.com

I. Tsagareli, Research Scientist, Ilia Vekua Institute of Applied Mathematics of Ivane Javakhishvili Tbilisi State University
E-mail: I.Tsagareli@yahoo.com

Abstract. The representation formula of a general solution of the homogeneous system of differential equations obtained in the paper is expressed by means of three harmonic and four metaharmonic functions. These formulas are very convenient and useful in many particular problems for domeins with concrete geometry.

Key words: Fugacity of temperature; metaharmonic; microrotation; microstretch; microtemperature.

UDC 536.7
SCOPUS CODE 2610
DOI: https://doi.org/10.36073/1512-0996-2019-3-121-132

Основные граничные задачи статики теории термоупругости с учётом разных полей

Саломе Бицадзе — Департамент математики, Грузинский технический университет, Грузия, 0160, Тбилиси, ул. М. Костава, 77
E-mail: Sali.bitsadze28@gmail.com

Рецензенты:

С. Харибегашвили, профессор факультета информатики и систем управления ГТУ
E-mail: kharibegashvili@yahoo.com
И. Цагарели, научный работник Института математики им. И. Векуа
E-mail: I.Tsagareli@yahoo.com

Аннотация. В работе рассматриваются основные граничные задачи статики теории термоупругости, в частности граничные задачи Дирихле и Неймана. В случае задачи Дирихле на границе заданы предельные значения векторов перемещения и микротемпературы, а также функций микровращения, микрорастяжения и температуры. В случае задачи Неймана на границе задано предельное значение обобщенного термоупругого напряжения. Получены формулы Грина для системы однородных дифференциальных уравнений. С помощъю формулы Грина доказаны теоремы единственности граничных задач Дирихле и Неймана. В частности, если задача Дирихле, как внутренняя, так и внешняя, а также внешняя задача Неймана имеет решение, то оно единственно, что же касается решения внутренней задачи Неймана, то она определена с точностью до слагаемого определенного вектора.

Ключевые слова: микротемпература; микрорастяжения; микровращения; функция температуры.

განხილვის თარიღი 25.03.2019
შემოსვლის თარიღი 27.05.2019
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 26.10.2019