UDC 511.5
SCOPUS CODE 2607
https://doi.org/10.36073/1512-0996-2019-4-141-173

ერთი ფუნდამენტური ამოცანის შესახებ დიოფანტურ გეომეტრიულ ფიგურებზე

ზურაბ აღდგომელაშვილი მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: diophant_zura@rambler.ru

რეცენზენტები:

ალ. კირთაძე, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი
E-mail: kirtadze2@yahoo.com

მ. მანია, თსუ-ის ა. რაზმაძის მათემატიკის ინსტიტუტის მთავარი მეცნიერი თანამშრომელი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი
E-mail: mania@rmi.ge

ანოტაცია. ჩვენ დიოფანტურს ვუწოდებთ მთელრიცხვა n-კუთხედს იმ მოტივით, რომ თითოეული მათგანის კომბინატორული თვისებების დასადგენად საჭიროა გარკვეული დიოფანტური განტოლების (განტოლებათა სისტემის) ამოხსნა, რაც ამ საკითხის შემსწავლელი ამოცანებიდან ერთ-ერთი ფუნდამენტური ამოცანაა.

ამოცანა (n;k): არსებობს თუ არა ყოველი ფიქსირებული k ნატურალური რიცხვისათვის ისეთი დიოფანტური n-კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია k-სი, და თუ არსებობს, მაშინ იპოვეთ ყველა ასეთი n.

ნაჩვენებია, რომ არ არსებობს ისეთი დიოფანტური n-კუთხედი $(n > 3)$, როგორც ამოზნექილი, ასევე ჩაზნექილია, რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია ++-ის. ე.ი. $k = 1$-სათვის ზემოხსენებული საკითხი გადაჭრილია.

კვლევის მეშვეობით ნაპოვნია რიგი დიოფანტური ოთხკუთხედები, რომელთა ერთ-ერთი გვერდი ტოლია 2-ის (აქ უნდა შევნიშნოთ, რომ ყოველი მათგანი წრეწირში ჩახაზული აღმოჩნდა). ნაჩვენებია, რომ ყოველი მათგანი წრეწირში ჩახაზული ისეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის დიაგონალის სიგრძე k-ს ტოლია. ნაჩვენებია, რომ ნებისმიერი ნატურალური $(k \geq 3)$-ისათვის მოიძებნება დიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძე k-ს ტოლია.

$n \in \{3; 4; 5\}$ ფუნდამენტური კვლევის შედეგად ნაჩვენებია, რომ $k = 2$-სათვის ამოზნექილი n-კუთხედებისათვის (თუმცა არც ერთი ასეთი დიოფანტური ხუთკუთხედი ჯერ არ არის ნაპოვნი. ავტორის აზრით ასეთი ხუთკუთხედი არ არსებობს) და $n \in \{3; 4; 5; 6\}$ – ჩაზნექილი n-კუთხედებისათვის (აქაც $n = 5$ და $n = 6$-სათვის არც ერთი ასეთი n - კუთხედი არ არის ჯერ ნაპოვნი. და თუ არსებობს,

შემთხვევისათვის მოყვანილია ასეთი ფიგურების ყველა შესაძლო სახე).

ამოცანა (n;k), k=3-სათვის და ნაჩვენებია, რომ ამ შემთხვევაში $3 \le n \le 7$, მაგრამ არ არის ნაპოვნი არც ერთი ასეთი დიოფანტური ხუთკუთხედი, არც დიოფანტური ექვსკუთხედის და არც დიოფანტური შვიდკუთხედი, ავტორის აზრით ასეთი დიოფანტური ფიგურები არ არსებობს, და თუ არსებობს. მოყავს მათი სავარაუდო სახე.

საკვანძო სიტყვები: დიოფანტური ფიგურები.

შესავალი

ჯერ კიდევ უხსოვარი დროიდან მათემატიკოსები იყვნენ დაინტერესებულნი მთელრიცხვა გეომეტრიული ფიგურების კვლევით. ურიგო არ იქნებოდა შეგვენიშნა, რომ ასეთი ფიგურების თვისებების კვლევით დაინტერესებულნი იყვნენ ისეთი დიდი მათემატიკოსებიც, როგორებიც არიან: პ. ფერმა, კ.ფ. გაუსი, ლ. ეილერი, ვ. სერპინსკი, ჰ. შტეინჰაუზი და სხვა. ასეთ ფიგურებს ჩვენ ვუწოდებთ დიოფანტურს იმ მოტივით, რომ თითოეული მათგანის თვისებების დასადგენად საჭიროა გარკვეული დიოფანტური განტოლების (განტოლებათა სისტემის) ამოხსნა.

ვ. სერპინსკისა და ჰ. შტეინჰაუზის მიერ დასმული და გადაჭრილი იყო ამ თემასთან დაკავშირებული არაერთი პრობლემური ამოცანა. აქ შევჩერდებით ერთ მათგანზე.

ძირითადი ნაწილი

ამოცანა: ყოველი $n \in N$-სათვის სიბრტყეში მოიძებნება ერთ წრფეზე არამდებარე ისეთი n წერტილი, რომელთათვის ყოველ ორ მათგანს შორის მანძილი გამოისახება ნატურალური რიცხვით.

ამ ამოცანის გადაჭრისას მათ აჩვენეს, რომ ყოველი $n \in N$-სათვის ყოველთვის არსებობს დიოფანტური n-კუთხედი. აქ იბადება კითხვა: არსებობს თუ არა ყოველი ფიქსირებული $k \in N$-სათვის დიოფანტური n-კუთხედი, რომლის რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი ტოლია k-ს, და თუ არსებობს, მაშინ ვიპოვოთ ყველა ასეთი n.

დიოფანტური გეომეტრიული ფიგურების შემსწავლელი ამოცანებიდან ცხადია, ერთ-ერთი უმთავრესი ადგილი უჭირავს შემდეგს:

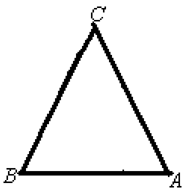
ამოცანა* (n;k) არსებობს თუ არა ყოველი ფიქსირებული k ნატურალური რიცხვისათვის, დიოფანტური n-კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია k-სი, და თუ არსებობს, მაშინ ვიპოვოთ ყველა ასეთი n.

ჩვენ მიერ ნაჩვენებია, რომ არ არსებობს ისეთი დიოფანტური n-კუთხედი, როგორც ამოზნექილი, ისე ჩაზნექილი, რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია 1-ის. ე.ი. $k = 1$-სათვის ზემოხსენებული საკითხი გადაჭრილია.

ამის დასამტკიცებლად განვიხილოთ რამდენიმე ამოცანა.

ISSN 1512-0996
www.shromebi.gtu.ge

ლემა 1. თუ დიოფანტური სამკუთხედის ერთ-ერთი გვერდი 1-ის ტოლია, მაშინ მისი დანარჩენი გვერდები ამ სამკუთხედის ტოლი ფერდებია.



სურ. 1

მოც: ΔABC;

$|BC|,\ |AC| \in N;$

$|AB| = 1.$

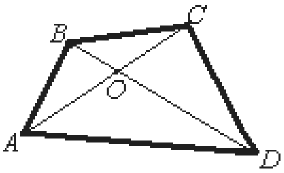
u.d: $|BC| = |AC|$.

ზოგადობის შეუზღუდავად ვთქვათ $|BC| \le |AC|$. სამკუთხედის უტოლობის ძალით $|AB| + |BC| > |AC|$ ანუ $1 + |BC| > |AC|$.

ე.ი. $\begin{cases} |BC|,\ |AC| \in N; \\ |BC| \le |AC| < |BC| + 1. \end{cases} \Rightarrow (|BC| = |AC|)$. რ.დ.გ.

ეს შესანიშნავი თვისება არის ერთ-ერთი ქვაკუთხედი დიოფანტური და ბიდიოფანტური გეომეტრიული ფიგურების კვლევის აპარატისა.

ლემა 2. ამოზნექილი დიოფანტური ოთხკუთხედის ყოველი გვერდისა და ყოველი დიაგონალის სიგრძე 1-ზე მეტია.



სურ. 2

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე.ი. ვთქვათ ოთხკუთხედ $ABCD$-ში თითოეული გვერდისა და დიაგონალის სიგრძე გამოისახება ნატურალური რიცხვით და ამასთან ერთ-ერთი გვერდის სიგრძე, ზოგადობის შუზღუდავად ვთქვათ $|AB| = 1$.

ლემა 1-ის თანახმად $|BC| = |AC|$ და $|BD| = |AD|$.

ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან მაშინ C და D წერტილები უნდა მდებარეობდეს $[AB]$-ს შუამართობზე. ე.ი. ჩვენი დაშვება მცდარია. მაშასადამე ამ პირობით $\square ABCD$ -ს თითოეული გვერდის სიგრძე 1-ზე მეტია.

ახლა ვთქვათ $\square ABCD$ -ს დიაგონალის სიგრძე 1-ის ტოლია, ზოგადობის შეუზღუდავად ვთქვათ $|AC| = 1$.

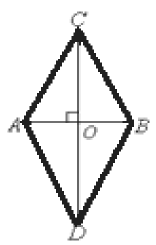
ლემა 1-ის თანახმად $|AB| = |BC|$ და $|CD| = |AD|$. ამასთან ΔBOC და ΔAOD -დან სამკუთხედის უტოლობის გამოყენებით ადვილი საჩვენებელია, რომ $|BD| + |AC| > |BC| + |AD|$ ანუ $|AB| + |AD| < |BD| + 1$. ΔABD -დან გვაქვს $|AB| + |AD| > |BD|$. ე.ი. $\begin{cases} |AB|,\ |BD|,\ |AB| \in N; \\ |BD| < |AB| + |AD| < |BD| + 1. \end{cases}$ ეს შეუძლებელია. ამრიგად დაშვება მცდარია ანუ $|AC| > 1$.

ე.ი. საბოლოოდ გვაქვს, რომ ყოველი ამოზნექილი დიოფანტური ოთხკუთხედის თითოეული გვერდისა და დიაგონალის სიგრძე 1-ზე მეტია. რ.დ.გ.

ლემა 3. თუ სიბრტყეზე მდებარე ოთხი წერტილიდან არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე და ამასთან მანძილი ყოველ ორ მათგანს შორის გამოისახება ნატურალური რიცხვით, მაშინ ამ მანძილებიდან თითოეული მათგანი 1-ზე მეტია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე.ი. ვთქვათ სიბრტყეზე მოიძებნება ისეთი ოთხი წერტილი, რომელთაგან არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე, მანძილი ყოველ ორ მათგანს შორის გამოისახება ნატურალური რიცხვით და ამასთან, რომელიღაც ამ მანძილებიდან 1-ის ტოლია. მაშინ **ლემა 1**-ის თანახმად დანარჩენი ორივე წერტილი უნდა მდებარეობდეს 1-ის ტოლი სიგრძის მონაკვეთის შუამართობზე. აქ გვექნებოდა ორი შემთხვევა

1)

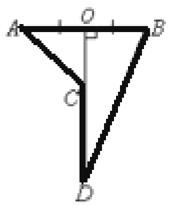


სურ. 3

მოც: ΔABC;

$|AB| = 1$;
$|AC| = |BC| \in N;$
$|AD| = |DB| \in N;$
$|CD| \in N.$

2)



სურ. 4

მოც: $|AB| = 1, \quad |AC| = |BC| = m;$

$|AD| = |DB| = n,$
$|CD| = l, \ m,n,l \in N.$

1) ეს შემთხვევა განხილულია **ლემა 2**-ში.

2) $\Delta\, AOC$ და $\Delta\, DOB$ -დან გვაქვს:

$$\begin{cases} |AC|^2 = |AO|^2 + |OC|^2 ; \\ |BD|^2 = |OB|^2 + |OD|^2 ; \\ |OD| = |OC| + |CD|, \quad |AO| = |OB| = 0{,}5; \\ |AC| = |CB| = m, \quad |AD| = |DB| = n, \quad |CD| = l, \quad m,n,l \in N. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + |OC|^2 ; \\ n^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(l + |OC|\ \right)^2 ; \\ m,n,l \in N. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |OC| = \dfrac{n^2 - m^2 - l^2}{2\ \ l} ; \\ 4m^2 - 1 = \left(2\ \ |OC|\right)^2 ; \\ m,n,l \in N. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |OC| = \dfrac{n^2 - m^2 - l^2}{l} = q \in Q_+ ; \\ 4m^2 - 1 = q^2 ; \\ m,n,l \in N. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m,q \in N; \\ 4m^2 - q^2 = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m,q \in N ; \\ (2m - q)(2m + q) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m,q \in N ; \\ 2m - q = 1; \\ 2m + q = 1. \end{cases}$$

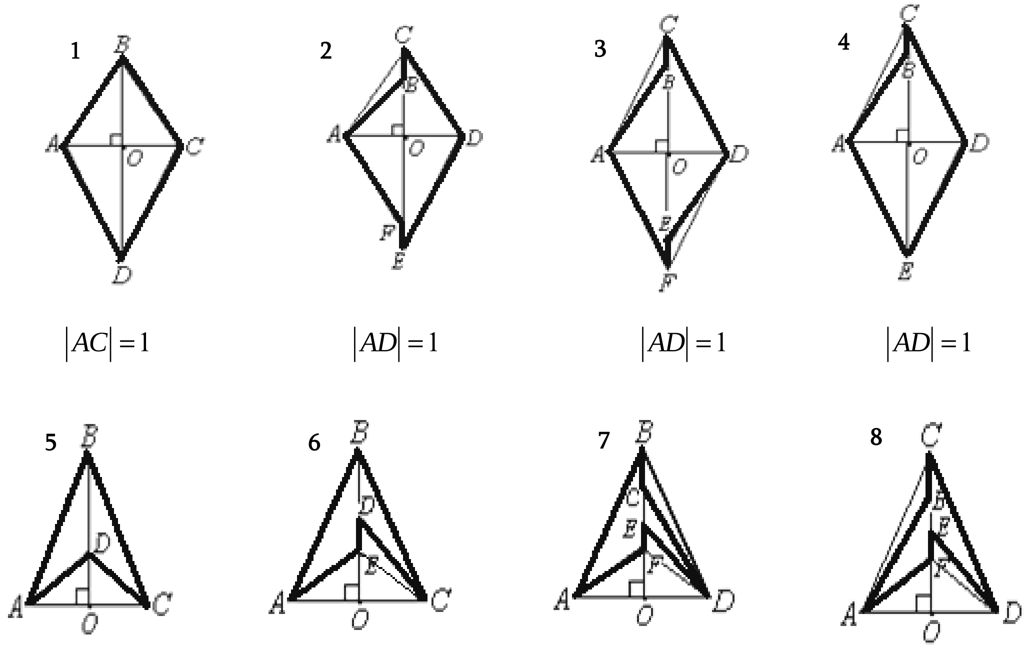
ეს კი შეუძლებელია. მაშასადამე მანძილი ნებისმიერ ორ წერტილს შორის ამ მოცემული წერტილებიდან, მეტია 1-ზე. რ.დ.გ.

თეორემა 1. ამოზნექილი დიოფანტური n-კუთხედის ($n>3$), ყოველი გვერდისა და ყოველი დიაგონალის სიგრძე 1-ზე მეტია.

დავუშვათ საწინააღმდეგო. ე.ი. დავუშვათ ამოზნექილი დიოფანტური n-კუთხედის ($n>3$), რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი ტოლია 1-ის. **ლემა 1**-ის ძალით დანარჩენი წვეროები უნდა მდებარეობდნენ ამ ორი წვეროს შემაერთებელი მონაკვეთის შუამართობზე. ვინაიდან ეს n-კუთხედი უნდა იყოს ამოზნექილი, ამიტომ ცხადია n=4, მაგრამ ლემა 2-ის თანახმად ასეთი ოთხკუთხედი არ არსებობს. ე.ი. ჩვენი დაშვება მცდარია ანუ ყოველი ამოზნექილი დიოფანტური n-კუთხედის ($n>3$), ყოველი გვერდისა და ყოველი დიაგონალის სიგრძე მეტია 1-ზე. რ.დ.გ.

თეორემა 2. თუ სიბრტყეზე მდებარე n-წერტილიდან ($n>3$), არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე და ამასთან მანძილი ყოველ ორ მათგანს შორის გამოისახება ნატურალური რიცხვით, მაშინ ამ მანძილებიდან ყოველი მათგანი 1-ზე მეტია.

ისევე, როგორც წინა თეორემაში, თუ მანძილი დიოფანტური მრავალკუთხედის რომელიმე ორ წვეროს შორის 1-ის ტოლია, მაშინ მისი დანარჩენი წვეროები უნდა მდებარეობდეს ამ ორი წვეროს შემაერთებელი მონაკვეთის შუამართობზე. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ ამ წვეროებიდან არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე, მაშინ გვექნება მხოლოდ შემდეგი შემთხვევები (იხ. სურ. 5).



სურ. 5

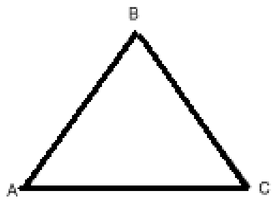
პირველ ოთხს არ გააჩნია 1-ლი ამონახსნი თეორემის თანახმად. ოთხივე შევსებით ღებულობს 1)-ის სახეს და ვინაიდან არ არსებობს ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი, ამიტომ არ იარსებებს არც 2), 3) და 4) სახის დიოფანტური ოთხკუთხედები, ხოლო ბოლო ოთხს არ გააჩნა ამონახსნი მე-2 თეორემის ძალით. აქაც

შევსებით 6), 7) და 8) დადის 5)-ის სახეზე. ე.ი. ჩვენი დაშვება მცდარია ანუ ამოცანის პირობით მოცემული მანძილებიდან ყოველი მათგანი 1-ზე მეტია. ამით მთლიანად დამტკიცებულია.

ე. ი. ჩვენ დავამტკიცეთ შემდეგი თეორემა:

ამოცანა* (n;1) არ არსებობს ისეთი დიოფანტური n-კუთხედი ($n>3$), როგორც ამოზნექილი, ასევე ჩაზნექილი, რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე 1-ის ტოლი იყოს.

ამოცანა 1. დიოფანტურ ΔABC-ში $|AC|=2$ და $|AB|=a;(a\in N)$ ვიპოვოთ $|BC|$.



მოც: Δ ABC; $|BC|\in N; |AC|=2, |AB|=a;$ $a\in N, a\neq 1.$

უ. გ. $|BC|$

გვაქვს ორი შემთხვევა: 1) $\begin{cases} a\in N; a\geq 2; \\ |BC|\leq a. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a\in N; a\geq 2; \\ |BC|\geq a. \end{cases}$

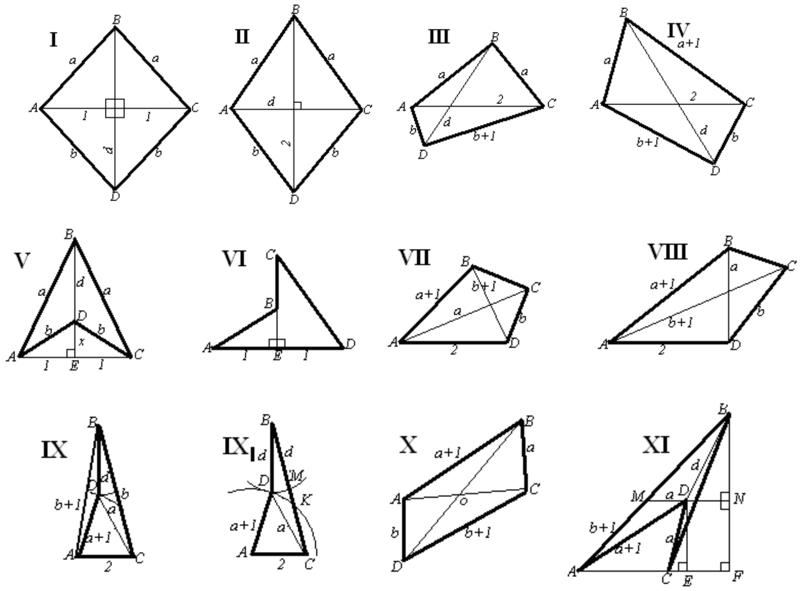
1) ΔABC-დან სამკუთხედის უტოლობის თანახმად $a<|BC|+2$

$$\begin{cases} |BC|; a\in N; a\geq 2; \\ |BC|\leq a<|BC|+2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in N \\ \left[\begin{array}{l} a=|BC|; \\ a=|BC|+1. \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in N; a\geq 2; \\ \left[\begin{array}{l} |BC|=a; \\ |BC|=a-1. \end{array}\right. \end{cases}$$

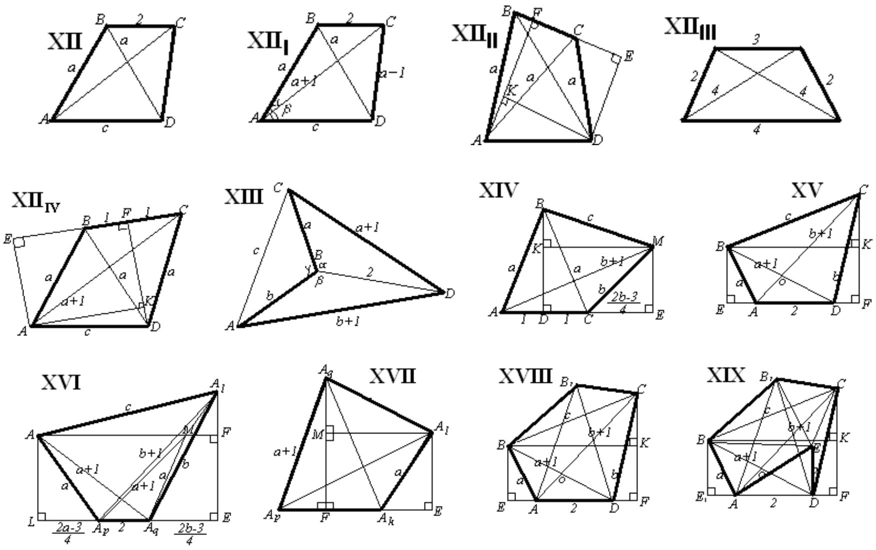
2) Δ ABC-დან სამკუთხედის უტოლობის თანახმად $|BC|<a+2$

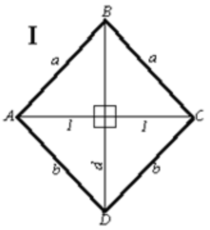
$$\begin{cases} |BC|; a\in N; a\geq 2; \\ a\leq |BC|<a+2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\in N; a\geq 2; \\ \left[\begin{array}{l} |BC|=a; \\ |BC|=a+1. \end{array}\right. \end{cases}$$

ჩვენ მიერ ქვემოთ მოყვანილია ყველა ისეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე შეიძლება 2-ის ტოლი იყოს



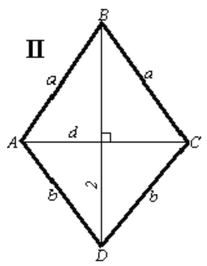
ISSN 1512-0996
www.shromebi.gtu.ge





მოც: $\begin{cases} a,b,d \in N; \\ |AB| = |BC| = a; \\ |AD| = |CD| = b; \\ |AC| = 2; \quad |BD| = d. \end{cases}$

ლემა 3-ში ჩვენ უკვე გვქონდა ნაჩვენები, რომ ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.

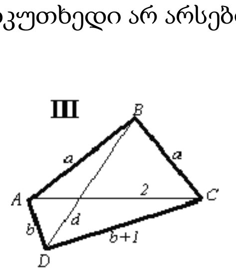


მოც: $\begin{cases} a,b,d \in N; \;\; a < b; \\ |AB| = |BC| = a; \\ |AD| = |CD| = b; \\ |AC| = d; \quad |BD| = 2. \end{cases}$

ΔABC -დან გვაქვს $\begin{cases} a,b \in N; \\ a < b; \\ a+2 > b. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a,b \in N; \\ b-2 < a < b \end{cases} \Rightarrow (a = b-1)$

ცნობილია, რომ ამოზნექილი ოთხკუთხედის დიაგონალების სიგრძეთა ჯამი მეტია მოპირდაპირე გვერდების სიგრძეთა ჯამზე. ამიტომ $d+2 > a+b$ ანუ $d+2 > 2b-1$.

ΔABC -დან $\begin{cases} d,b \in N; \\ d < 2a = 2b-2; \end{cases}$ ე.ი. $\begin{cases} d,b \in N; \\ 2b-3 < d < 2b-2 \end{cases}$ ეს კი შეუძლებელია. ამიტომ ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.



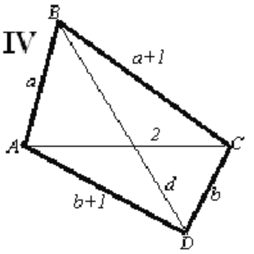
მოც: $\begin{cases} a,b,d \in N; \;\; |AB| = |BC| = a; \\ |AD| = b; \;\; |CD| = b+1 \\ |AC| = 2; \;\; |BD| = d. \end{cases}$

ΔABD -დან $d < a+b$.

ოთხკუთხედ $ABCD$ -დან $|AC| + |BD| > |AB| + |CD|$, ანუ $d+2 > a+b+1$.

გვაქვს: $\begin{cases} d < a+b \\ d+2 > a+b+1 \\ a,b,d \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-1 < d < a+b \\ a,b,d \in N \end{cases}$ ეს კი შეუძლებელია. ამიტომ ასეთი დიოფანტური ოთხ-კუთხედი არ არსებობს.

IV

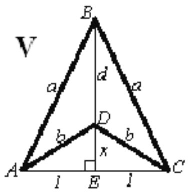


მოც: $\begin{cases} a,b,d \in N; \\ |AB| = a, \;\; |BC| = a+1; \\ |AD| = b+1, \;\; |CD| = b; \\ |AC| = 2; \;\; |BD| = d. \end{cases}$

$\begin{cases} |BD| + |AC| > |BC| + |AD|; \\ |BD| < |AB| + |AD| \;\; ; \\ |AB|, \;\; |BC|, \;\; |AD|, \;\; |BD| \in N. \end{cases}$ ე.ი. $\begin{cases} a,b,d \in N; \\ d+2 > a+1+b+1 \\ d < a+b+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a,b,d \in N; \\ a+b < d < a+b+1 \end{cases}$

ეს კი შეუძლებელია. ამიტომ ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.

V



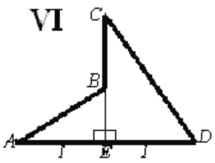
მოც: $\begin{cases} a,b,d \in N; \\ |AB| = |BC| = a; \\ |AD| = |CD| = b; \\ |BD| = d; \;\; |AC| = 2 \end{cases}$

მართკუთხა ΔAED და მართკუთხა ΔAEB -დან გვაქვს:

$$\begin{cases} a,b,d \in N \\ 1^2 + x^2 = b^2 \\ 1^2 + (d+x)^2 = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a,b,d \in N \\ 1 + x^2 = b^2 \\ 1 + x^2 + d^2 + 2dx = a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a,b,d \in N \\ x = \dfrac{a^2 - b^2 - d^2}{2d} \in Q_+ \\ 1 + x^2 = b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b,x \in N \\ (b-x)(b+x) = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \begin{cases} b,x \in N \\ b - x = 1 \\ b + x = 1 \end{cases}$ ეს კი შეუძლებელია. ამიტომ ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.

VI



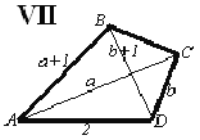
მოც: $\begin{cases} |AB| = |BD| = a; \;\; |AC| = |CD| = b; \\ |BC| = d; \;\; |AD| = 2. \\ a,b,d \in N \end{cases}$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე B და C წერტილები მდებარეობს $[AD]$ -ს შუა მართობზე, ამიტომ $|AE| = |ED| = \dfrac{|AD|}{2} = 1$.

მართკუთხა ΔAEB და მართკუთხა ΔCED -დან გვაქვს:

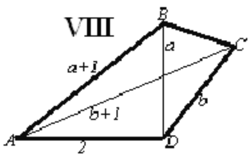
$$\begin{cases} a^2 = |BE|^2 + 1 \\ b^2 = \left(d + |BE|\right)^2 + 1; \\ a,b,d \in N. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = |BE|^2 + 1 \\ |BE| = \dfrac{b^2 - d^2 - a^2}{2d} \in Q_+ \\ a,b,d \in N. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 - |BE|^2 = 1 \\ a, |BE| \in N \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow\begin{cases}\left(a-|BE|\right)\left(a+|BE|\right)=1;\\ a,|BE|\in N.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a-|BE|=1;\\ a+|BE|=1;\\ a,|BE|\in N.\end{cases}$ ეს კი შეუძლებელია. ამიტომ ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.



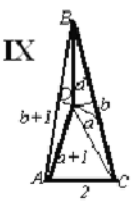
მოც: $\begin{cases}a,b,d,c\in N;\\ |AB|=a+1;\ \ |AC|=a;\ \ |BC|=c;\ \ |CD|=b;\\ |BD|=b+1;\ \ |AD|=2.\end{cases}$

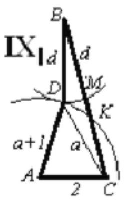
ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს, ვინაიდან ამოზნექილი ოთხკუთხედის დიაგონალების სიგრძეთა ჯამი მეტი უნდა იყოს ამ ოთხკუთხედის მოპირდაპირე გვერდების სიგრძეთა ჯამზე, ე.ი. უნდა იყოს $|BD|+|AC|>|AB|+|CD|$, მაგრამ, აქედან გამომდინარე გვექნებოდა $a+(b+1)>(a+1)+b$, რაც შეუძლებელია.



მოც: $\begin{cases}a,b,d,c\in N;\\ |AB|=a+1; |AC|=b+1; |BC|=c; |CD|=b;\\ |BD|=a;\ \ |AD|=2.\end{cases}$

VIII-შიც, VII-ს მსგავსად უნდა იყოს $|BD|+|AC|>|AB|+|CD|$, მაგრამ, აქედან გამომდინარე გვექნებოდა $a+(b+1)>(a+1)+b$. ამიტომ ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.





მოც: $\begin{cases}a,b,d,c\in N;\\ |AB|=b+1;\ \ |AC|=2;\ \ |BC|=b;\ \ |CD|=a;\\ |BD|=d;\ \ \ |AD|=a+1.\end{cases}$

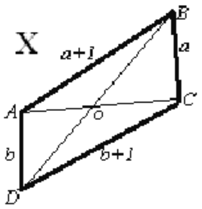
შემოვხაზოთ A წერტილიდან $[AD]$ და B წერტილიდან $[BD]$ რადიუსებით რკალები და ვთქვათ ისინი კვეთენ $[BC]$ -ს შესაბამისად K და M წერტილებში.

ΔAKC -დან გვაქვს $\left(2+|CK|>a+1\right)\Rightarrow\left(|CK|>a-1\right)$.

$$\begin{cases}|CK|+|BM|<b;\\ |CK|>a-1;\ \ |BM|=d.\end{cases}\Rightarrow a-1+d<b\Rightarrow d<b-a+1.$$

ΔBDC -დან $d+a>b\Rightarrow d>b-a$.

ე.ი. $\begin{cases}d>b-a;\\ d<b-a+1\\ a,b,d\in N\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b-a<d<b-a+1;\\ a,b,d\in N\end{cases}$ ეს კი შეუძლებელია. ამიტომ ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.



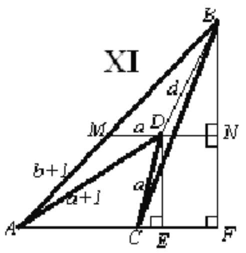
მოც: $\begin{cases} a,\ b, |BD| \in N; a>3;\ \ b>3; \\ |AB| = a+1;\ \ |BC| = a;\ \ |AD| = b;\ \ |CD| = b+1; \\ \left[\begin{array}{l} |AC| = 2; \\ |AC| = 3. \end{array}\right. \end{cases}$

$$\begin{cases} a,\ b \in N \\ a>3 \\ b>3 \\ \left[\begin{array}{l} |AC| = 2 \\ |AC| = 3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |AC|^2 + a^2 \le (a+1)^2 \\ |AC|^2 + b^2 \le (b+1)^2 \end{cases} \Rightarrow \Rightarrow \begin{cases} A\widehat{C}B \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \\ D\widehat{A}C \in \left[\dfrac{\pi}{2};\pi\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < |BD| < a+1 \\ b < |DO| < b+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a+b < |BO| + |OD| < a+b+2 \Rightarrow |BD| \in (a+b; a+b+2).$$

ΔBCD -დან გვაქვს $|BD| < a+b+1$. ე.ი. $\begin{cases} |BD| \in (a+b;\ a+b+1); \\ |BD| \in N \end{cases} \Rightarrow |BD| \notin N$.

ამიტომ ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.



$$\Delta MBN \backsim \Delta ABF \Rightarrow \frac{|MB|}{|AB|} = \frac{|BN|}{|BF|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|MB|}{b+1} = \frac{\sqrt{12b^2+12b-9} - \sqrt{12a^2+12a-9}}{\sqrt{12b^2+12b-9}} = 1 - \sqrt{\frac{2a-1}{2b-1}\cdot\frac{2a+3}{2b+3}} <$$

$$< 1 - \frac{2a-1}{2b-1} = \frac{b-a}{b-\frac{1}{2}}.$$

გვაქვს $|MB| < (b-a) + 1.5\left(\dfrac{b-a}{b-\frac{1}{2}}\right) < (b-a) + 1.5$.

$$\begin{cases} |BD| < |MB| < (b-a)+1.5 \\ |BD| \in N \end{cases} \Rightarrow |BD| \le (b-a)+1$$

ΔADB -დან გვაქვს: $(a+1) + |BD| > b+1 \Rightarrow |BD| > b-a$.

ე.ი. $\begin{cases} b-a < |BD| \le b-a+1; \\ a,\ b,\ |BD| \in N \end{cases} \Rightarrow |BD| = b-a+1.$

მართკუთხა ΔDNB -დან $|DN|^2 + |BN|^2 = |BD|^2$. ე.ი.

$\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{12b^2+12b-9} - \sqrt{12a^2+12a-9}}{4}\right)^2 = \left((b-a)+1\right)^2$. საიდანაც მივიღებთ:

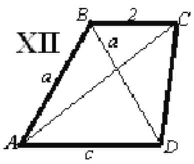
$$24a^2b-24ab^2-62ab+37a^2+13b^2+28b-40a+13=0 \qquad (*)$$

აქედან გამომდინარე

$$37a^2+13b^2+13\equiv 0(mod\,2)\Rightarrow a^2+b^2+1\equiv 0(mod\,2)\Rightarrow \begin{cases} a=2p \\ b=2k-1 \\ p,\ k\in N \end{cases}\cup\begin{cases} a=2p-1 \\ b=2k \\ p,\ k\in N \end{cases}$$

თუ b=2k მაშინ (*)-დან გვაქვს: $37a^2+13=4\cdot 37p(p-1)+37+13\equiv 0(mod\,4)$, რაც შეუძლებელია.

თუ a=2p, მაშინ (*)-დან გვაქვს $13b^2+13=13(4p(p-1)+2)\equiv 0(mod\,4)$, რაც ასევე შეუძლებელია. ე. ი. ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.



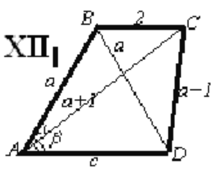
მოც: $\begin{cases} |AB|=|BD|=a,\quad |AD|=c,\quad |BC|=2; \\ |AC|,\ |CD|,\ a,\ c\in N;\ |CD|<|BD|. \end{cases}$

ამოცანის პირობიდან გამომდინარე გვაქვს: c<2a;

$$|CD|=a-1;\ \left[\begin{array}{ll} |AC|=a+1; & (*) \\ |AC|=a & (**) \end{array}\right.$$

განვიხილოთ თითოეული მათგანი ცალ-ცალკე:

(*)



ΔABC და ΔACD-დან კოსინუსების თეორემით გვაქვს:

$$\begin{cases} 2^2=a^2+(a+1)^2-2a(a+1)cos\,\alpha \\ (a-1)^2=c^2+(a+1)^2-2c(a+1)cos\,\beta \end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases} cos\,\alpha=\dfrac{2a^2+2a-3}{2};\quad sin\,\alpha=\dfrac{\sqrt{12a^2+12a-9}}{2a(a+1)}; \\ cos\,\beta=\dfrac{c^2+4a}{2c(a+1)};\quad sin\,\beta=\dfrac{\sqrt{(c^2-4)(4a^2-c^2)}}{2c(a+1)} \end{cases}$$

ΔABD -დან

$$\frac{c}{2a}=\cos(\alpha+\beta)=\frac{(c^2+4a)(2a^2+2a-3)}{4ac(a+1)^2}-\frac{\sqrt{(c^2-4)(4a^2-c^2)(12a^2+12a-9)}}{4ac(a+1)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{(c^2-4)(4a^2-c^2)(12a^2+12a-9)}=-(2a+5)c^2+(8a^3+8a^2-12a)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(a+1)^2c^4-4(a+1)^2(20a^2-9)c^2+64a^4(a+1)^2=0\Rightarrow 4c^4-(20a^2-9)c^2+16a^4=0.$$

აქედან გამომდინარე $c=4p,\ (p\in N)$. ჩასმით მივიღებთ:

$$\left(4(4p)^4-(20a^2-9)(4p)^2+16a^4=0\right)\Leftrightarrow\left(64p^4-(20a^2-9)p^2+a^4=0\right)$$

ბოლო განტოლებიდან გვაქვს: $\begin{cases} a^4=0(mod\,p^2) \\ a,\ p\in N \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a^2=pt \\ a,\ p,\ t\in N \end{cases}$ მიღებულის ბოლო განტოლებაში ჩასმითა და გამარტივებით მივიღებთ:

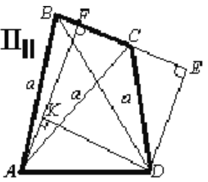
$$\begin{cases} t^2-20pt+(64p^2+9)=0 \\ p,\ t\in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=10p-3\sqrt{4p^2-1}; \\ t=10p+3\sqrt{4p^2-1}. \end{array}\right. \Rightarrow t\in\varnothing. \\ p,\ t\in N \end{cases}$$

შენიშვნა: $$\begin{cases} 4p^2-1=n^2; \\ p,\ n\in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2p-n)(2p+n)=1; \\ p,\ n\in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2p-n=1; \\ 2p+n=1; \Rightarrow (n\in\varnothing). \\ p,\ n\in N. \end{cases}$$

ე. ი. ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.

(**)

XII_{II}



მოც: $$\begin{cases} |AB|=|BD|=|AC|=a; \\ |CD|=a-1;\ \ |BC|=2;\ \ |AD|=c; \\ a,\ \ c\in N. \end{cases}$$

მართკუთხა ΔBED და მართკუთხა ΔCED -დან გვაქვს:

$$a^2-(2+|CE|)^2=(a-1)^2-|CE|^2 \Rightarrow |CE|=\frac{2a-5}{4};$$

$$|DE|=\sqrt{(a-1)^2-\left(\frac{2a-5}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{12a^2-12a-9}}{4}$$

მართკუთხა ΔAKD -დან პითაგორას თეორემით:

$$c^2=\left(\frac{2a-1}{4}\right)^2+\left(\sqrt{a^2-1}-\frac{\sqrt{12a^2-12a-9}}{4}\right)^2 \Rightarrow 4c^4-4(4a^2-2a-3)c^2+(4a^4-4a^3+a^2)=0$$

სადაც $a,\ \ c\in N,\ a>2,\ \ c>1$.

მიღებული განტოლებიდან გამომდინარეობს, რომ: a=2p; $p\in N$. ჩასმით მივიღებთ:

$$\begin{cases} c^4-(16p^2-4p-3)c^2+p^2(4p-1)^2=0 \\ p,c\in N, p,c>1 \end{cases} \tag{1}$$

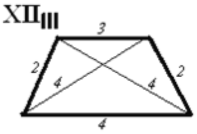
(1) –დან p=2-სათვის გვექნება:

$$\begin{cases} c^4-53c^2+192=0 \\ c\in N,\ \ c>1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=2 \\ c=7. \end{array}\right.$$

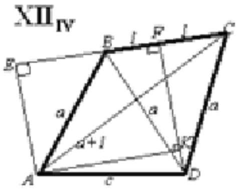
c=7-სათვის ΔACD გადაგვარებულია, ვინაიდან $|AC|+|CD|=4+3=7=|AD|$.

c=2-სათვის მივიღებთ ჩვენთვის უკვე ნაცნობ დიოფანტურ ტრაპეციას. (1)-ის სხვა რომელიმე ამონახსნი დღეისათვის ჩვენთვის უცნობია. ვფიქრობთ სხვა ნატურალური ამონახსნი არ არსებობს.

XII_{III}



XII_{IV}



მოც: $$\begin{cases} |AB|=|BD|=|CD|=a; \\ |AC|=a+1;\ \ |BC|=2;\ \ |AD|=c; \\ a,\ \ c\in N. \end{cases}$$

მართკუთხა ΔAEC -დან და მართკუთხა ΔAEB -დან გვაქვს:

$$(a+1)^2-(|EB|+2)^2=a^2-|EB|^2 \Rightarrow |EB|=\frac{2a-3}{4};\ |AE|=\sqrt{a^2-\left(\frac{2a-3}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{12a^2+12a-9}}{4}.$$

მართკუთხა ΔAKD -დან პითაგორას თეორემით:

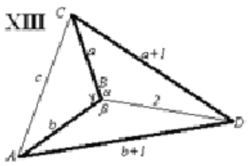
$$c^2=\left(\frac{2a+1}{4}\right)^2+\left(\sqrt{a^2-1}-\frac{\sqrt{12a^2+12a-9}}{4}\right)^2,$$

საიდანაც მივიღებთ: $4c^4-4(4a^2+2a-3)c^2+a^2(2a+1)^2=0$. XIIIII-ის ანალოგიურად მიიღება:

$$\begin{cases} c^4-(16p^2+4p-3)c^2+p^2(4p+1)^2=0 \\ p,\ c\in N, p,\ c>1 \\ a=2p \end{cases} \tag{2}$$

დღეისათვის არ არის ნაპოვნი (2)-ის თუნდაც ერთი ამონახსნი. ჩვენი აზრით, მას არ უნდა გააჩნდეს ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში.

XIII



მოც: $\begin{cases} \alpha+\beta>180°; \\ |BC|=a;\ \ |CD|=a+1;\ \ |AD|=b+1; \\ |AB|=b;\ \ |BD|=2;\ \ |AC|=c; \\ a,\ b,\ c\in N. \end{cases}$

$\Delta BCD;\ \Delta ABD$ და ΔABC -დან კოსინუსების თეორემით გვაქვს:

$$\begin{cases} (a+1)^2=a^2+2^2-4a\cdot\cos\alpha; \\ (b+1)^2=b^2+2^2-4b\cos\beta; \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma; \\ \cos\gamma=\cos(360°-(\alpha+\beta))=\cos(\alpha+\beta). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{3-2a}{4a};\ \ \sin\alpha=\dfrac{\sqrt{12a^2+12a-9}}{4a} \\ \cos\beta=\dfrac{3-2b}{4b};\ \ \sin\beta=\dfrac{\sqrt{12b^2+12b-9}}{4b} \Rightarrow \\ \cos\gamma=\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2ab}. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\cos(\alpha+\beta)=\frac{(3-2a)(3-2b)-\sqrt{(12a^2+12a-9)(12b^2+12b-9)}}{16ab} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{(12a^2+12a-9)(12b^2+12b-9)}=(3-2a)(3-2b)-8(a^2+b^2-c^2)\ \Leftrightarrow$$

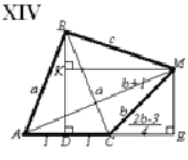
$$\Leftrightarrow 4c^4+c^2(9-6b-6a+4ab-8a^2-8b^2)+2(a-b)^2(2(a^2+ab+b^2)+3(a+b))=0 \tag{1}$$

თუ (1) ში ჩავსვავთ a=b-ს, მივიღებთ:

$$4c^4+c^2(9-6a-6a+4a^2-8a^2-8a^2)+2(a-a)^2(2(a^2+a^2+a^2)+3(a+a))=0 \Leftrightarrow 4c^2=12a^2+12a-9,$$

რომელსაც არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში, ვინაიდან, წინააღმდეგ შემთხვევაში, მისი მარცხენა მხარე ლუწი იქნებოდა, ხოლო მარჯვენა კი – კენტი. რაც შეეხება (1)-ს, დღეისათვის ჩვენთვის უცნობია თუნდაც ერთი სამეული ნატურალური ამონახსნებისა.

XIV



მოც: $\begin{cases} |AB|=|BC|=a;\ \ |MC|=b; \\ |AM|=b+1;\ |BM|=c;\ \ |AC|=2; \\ a,\ \ b,c\in N. \end{cases}$

$$|MK| = 1 + \frac{2b-3}{4} = \frac{2b+1}{4};$$

$$|BK| = \sqrt{c^2 - \left(\frac{2b+1}{4}\right)^2}; \quad |KD| = |ME| = \frac{\sqrt{12b^2+12b-9}}{4};$$

$$\begin{cases} |BD| = \sqrt{4c^2-1}; \\ |BD| = \sqrt{c^2 - \left(\frac{2b+1}{4}\right)^2} + \frac{\sqrt{12b^2+12b-9}}{4} \end{cases} \Rightarrow 4\sqrt{4c^2-1} = \sqrt{16c^2-(2b+1)^2} + \sqrt{12b^2+12b-9} \Leftrightarrow$$

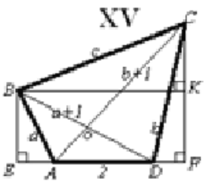
$$\Leftrightarrow 9c^4 - 6c^2(b^2+b) + (b^2+b)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{3c^2}{b^2+b} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{3c^2}{b^2+b} - 1 = 0 \Leftrightarrow b^2+b = 3c^2 \Leftrightarrow b(b+1) = 3c^2 \Leftrightarrow (2b+1)^2 - 12c^2 = 1. \quad (1)$$

$$\left(a_1{}^2 - 12b_1{}^2\right)\left(c_1{}^2 - 12d_1{}^2\right) = \left(a_1c_1 - 12b_1d_1\right)^2 - 12\left(a_1d_1 - b_1c_1\right)^2. \quad (2)$$

(1) არის პელის განტოლება. მისი ამოხსნით მივიღებთ (1)-ის ნატურალურ ამონახსნებს. მათ შორის პირველი სამი წყვილია:

$$\left[\begin{cases} 2b+1 = 7; \\ c = 2. \end{cases}; \begin{cases} 2b+1 = 97; \\ c = 28. \end{cases}; \begin{cases} 2b+1 = 1351; \\ c = 390. \end{cases}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{cases} b = 3; \\ c = 2. \end{cases}; \begin{cases} b = 48; \\ c = 28. \end{cases}; \begin{cases} b = 675; \\ c = 390. \end{cases}\right.$$



მოც: $\begin{cases} AB = a; \ |BC| = c; \ |CD| = b; \ |AC| = b+1; \\ |BD| = a+1; \ a,b,c \in N. \end{cases}$.

ΔACD-დან $\cos A\hat{D}C = \frac{3-2b}{4b} < 0 \quad (b \in N; \ b \neq 1)$.

კუმერის ერთ-ერთი თეორემით (**თეორემა: თუ ამოზნექილი ოთხკუთხედის გვერდებისა და დიაგონალების სიგრძეები გამოისახება რაციონალური რიცხვებით, მაშინ დიაგონალები გადაკვეთის წერტილით დაიყოფა რაციონალური სიგრძის მონაკვეთებად**) $|AO|, \ |OD| \in Q_+$.

ΔAOD - დან სინუსების თეორემით გვაქვს:

$$\frac{|AO|}{|OD|} = \frac{\sin O\hat{D}A}{\sin O\hat{A}D} = \frac{\sin B\hat{D}A}{\sin C\hat{A}D} = \frac{\sqrt{1-\cos^2 B\hat{D}A}}{\sqrt{1-\cos^2 C\hat{A}D}} = \frac{\sqrt{1-\left(\frac{2a+5}{4(a+1)}\right)^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{2b+5}{4(b+1)}\right)^2}} = \frac{(b+1)\sqrt{4a^2+4a-3}}{(a+1)\sqrt{4b^2+4b-3}}.$$

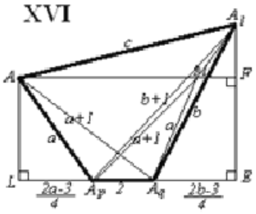
აქედან გამომდინარე $\frac{\sqrt{4a^2+4a-3}}{\sqrt{4b^2+4b-3}} = t \in Q_+$ ანუ $4a^2+4a-3 = t^2(4b^2+4b-3)$. ე.ი. ამ ამოცანის ამოხსნა დადის შემდეგი ამოცანის ამოხსნაზე.

ამოვხსნათ ნატურალურ *a, b, m* და *n* რიცხვებში განტოლება

$$n^2(4a^2+4a-3) = m^2(4b^2+4b-3).$$

ISSN 1512-0996
www.shromebi.gtu.ge

$$|AM| = \frac{2a-3}{2} + 2 = \frac{2a+1}{2}$$



ოთხკუთხედ $A_pA_qA_lM$ -დან

$$|AM| + |A_pA_l| > |AA_l| + A_pM \Rightarrow \frac{2a+1}{2} + b + 1 > a + 1 + c \Rightarrow c < b + \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad c \le b\,.$$

$b > a \Rightarrow \dfrac{2a-1}{2b-1} < \dfrac{2a+3}{2b+3}$ მართკუთხა ΔAFA_l -დან პითაგორას თეორემით:

$$c^2 = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{16}\left(\sqrt{12b^2+12b-9} - \sqrt{12a^2+12a-9}\right)^2 =$$

$$= \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 + \frac{12b^2+12b-9}{16}\left(1 - \sqrt{\frac{2a-1}{2b-1}\cdot\frac{a+3}{2b+3}}\right)^2 = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 + \frac{3(2b-1)(2b+3)}{16} \times$$

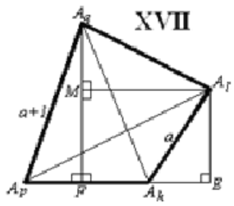
$$\times\left(1 - \sqrt{\frac{2a-1}{2b-1}\cdot\frac{a+3}{2b+3}}\right)^2 \ (*).$$

(*)-დან გვაქვს:

$$\boxed{1}\ c^2 < \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 + \frac{3(2b-1)(2b+3)}{16}\cdot\frac{4(b-a)^2}{(2b-1)^2} = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{2b+3}{2b-1}\right)\cdot(b-a)^2\,;$$

$$\boxed{2}\ c^2 > \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 + \frac{3(2b-1)(2b+3)}{16}\cdot\frac{4(b-a)^2}{(2b-3)^2} = \left(\frac{a+b+1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{2b-1}{2b+3}\right)\cdot(b-a)^2\,.$$

ე.ი თუ არსებობს ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი, მაშინ c უნდა აკმაყოფილებდეს $\boxed{1}$ და $\boxed{2}$ პირობებს.



მოც: $\begin{cases} A_pA_qA_lA_k; \\ |A_pA_q| = |A_qA_k| = |A_pA_l| = a+1 \\ |A_kA_l| = a; \quad |A_pA_k| = 2; \\ |A_qA_l| = c; \\ a,\ c \in N. \end{cases}$

მართკუთხა ΔA_pEA_l და ΔA_kEA_l -იდან გვაქვს:

$$(a+1)^2 - \left(|A_kE| + 2\right)^2 = a^2 - |A_kE|^2 \Rightarrow a^2 + 2a + 1 - |A_kE|^2 - 4|A_kE| - 4 = a^2 - |A_kE|^2 \Rightarrow |A_kE| = \frac{2a-3}{4}\,.$$

$$|A_qF| = \sqrt{(a+1)^2 - 1} = \sqrt{a^2+2a}\,; \quad |EF| = \frac{2a-3}{4} + 1 = \frac{2a+1}{4}\,.$$

$$|A_lE| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{2a-3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{12a^2+12a-9}}{4}\,.$$

ΔA_qMA_l -იდან პითაგორას თეორემით გვაქვს:

$$c^2 = \left(\frac{2a+1}{4}\right)^2 + \left(\sqrt{a^2+2a} - \frac{\sqrt{12a^2+12a-9}}{4}\right)^2 = \frac{4a^2+6a-1-\sqrt{12a^4+36a^3+15a^2-18a}}{2}\,.$$

მარტივი გარდაქმნებით მივიღებთ განტოლებას:

$$c^2 = \frac{4a^2+6a-1-\sqrt{(a^2+2a)(12a^2+12a-9)}}{2}. \qquad (1)$$

$\boxed{1}$ $$a \ge 3 \Leftrightarrow 12a^2+12a-9 \ge 9(a^2+2a) \Leftrightarrow \sqrt{(a^2+2a)(12a^2+12a-9)} \ge \sqrt{9(a^2+2a)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c^2 \le \frac{4a^2+6a-1-3(a^2+2a)}{2} = \frac{a^2-1}{2} \Leftrightarrow c \le \sqrt{\frac{a^2-1}{2}}$$

$\boxed{2}$ $$a^2+50a+36>0 \Leftrightarrow 48a^2+48a-36<49a^2+98a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12a^2+12a-9<\frac{49}{4}(a^2+2a) \Leftrightarrow (a^2+2a)(12a^2+12a-9)<3.5^2(a^2+2a)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(a^2+2a)(12a^2+12a-9)}<3.5(a^2+2a)^2.$$

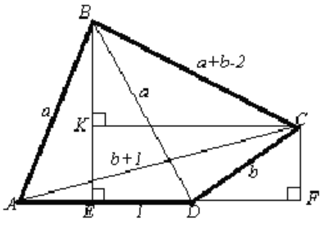
$$\text{ე.ი. } c^2 > \frac{4a^2+6a-1-3.5(a^2+2a)}{2} = \frac{0.5a^2-a-1}{2} = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2-\frac{3}{4} \Rightarrow c \ge \frac{a-1}{2}.$$

საბოლოოდ გვაქვს, რომ, თუ არსებობს ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი, მაშინ $c \in \left[\frac{a-1}{2}; \sqrt{\frac{a^2-1}{2}}\right)$.

ახლა განვიხილოთ წრეწირში ჩახაზულობისა და წრეწირზე შემოხაზულობის საკითხი ისეთი დიოფანტური ოთხკუთხედებისათვის, რომელთა ერთ-ერთი გვერდის სიგრძე 2-ის ტოლია.

როგორც ვნახეთ, XIV სახის დიოფანტურ ოთხკუთხედზე ზოგ შემთხვევაში შემოიხაზება წრეწირი. ახლა გამოვიკვლიოთ ჩაიხაზება თუ არა ასეთი სახის დიოფანტურ ოთხკუთხედში წრეწირი?

ამოცანა 2.



მოც: □ABCD-ში ჩაიხაზება წრეწირი

$$\begin{cases} |AB|=|BD|=a; \quad |CD|=b; \\ |AC|=b+1; \\ |AD|=2 \\ a,b,|BC| \in N. \end{cases}$$

(□ABCD-ში ჩაიხაზება წრეწირი) $\Rightarrow |BC|=|AB|+|CD|-|AD|=a+b-2$.

$$|BD|=\sqrt{|BE|^2+|ED|^2} \Rightarrow |BE|=\sqrt{a^2-1}$$

$$|BE|=|BK|+|KE|=\sqrt{|BC|^2-|KC|^2}+|CF|=\sqrt{(a+b-2)^2-\left(\frac{2b+1}{4}\right)^2}+\frac{\sqrt{12b^2+12b-9}}{4}.$$

$$\text{ე.ი. } \sqrt{a^2-1}=\sqrt{(a+b-2)^2-\left(\frac{2b+1}{4}\right)^2}+\frac{\sqrt{12b^2+12b-9}}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{16(a+b-2)^2-(2b+1)^2}=\sqrt{16a^2-16}-\sqrt{12b^2+12b-9} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{16a^2-16}-\sqrt{12b^2+12b-9}>0 \\ 16a^2+12b^2+32ab-64a-68b+63=16a^2-16+12b^2+12b-9-8\sqrt{(a^2-1)(12b^2+12b-9)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16a^2>12b^2+12b+7 \\ -4ab+8a+10b-11=\sqrt{(a^2-1)(12b^2+12b-9)}. \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a>2; \\ b>2. \end{cases} \Rightarrow -4ab+8a+108-11 \ge \sqrt{(2^2-1)(12\cdot 2^2+12\cdot 2-9}=\sqrt{189}>13 \Rightarrow 2a(b-2)<5b-12 \quad (*)$$

$$(b>2) \Rightarrow a<2.5-\frac{1}{b-2}<2.5.\ \text{ე.ი.}\ a=2\ .$$

a =2 -ის (1) ში ჩასმით მივიღებთ: $\begin{cases} -8b+16+10b-11=3\sqrt{4b^2+4b-3} \\ b\in N. \end{cases} \Leftrightarrow$

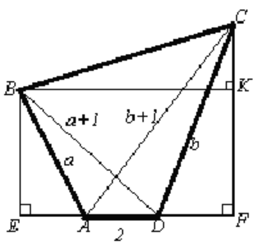
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2b+5=3\sqrt{4b^2+4b-3} \\ b\in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8b^2+4b-13=0 \\ b\in N \end{cases} \Leftrightarrow b\in\varnothing$$

b=2 -ის (1) ში ჩასმით მივიღებთ: $\begin{cases} -8a+8a+20-11=3\sqrt{7(a^2-1)} \\ a\in N; a\ge 2. \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 9=7(a^2-1) \\ a\in N; a\ge 2. \end{cases} \Rightarrow a\in\varnothing$. ე.ი. ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.

ახლა განვიხილოთ წრეწირში ჩახაზულობისა და წრეწირზე შემოხაზულობის საკითხი XV სახის დიოფანტური ოთხკუთხედებისათვის.

ამოცანა 3.



მოც: $ABCD$ ჩახაზულია წრეწირში;

$$\begin{cases} |AB|=a; |BD|=a+1; |CD|=b; \\ |AC|=b+1; |AD|=2; |BC|=c;. \\ a,b,c\in N \end{cases}$$

($\square\ ABCD$ ჩახაზულია წრეწირში)

$$\Rightarrow |BD|\cdot|AC|=|AB|\cdot|CD|+|BC|\cdot|AD| \Rightarrow (a+1)(b+1)=ab+2c \Leftrightarrow c=\frac{a+b+1}{2};$$

მართკუთხა ΔAEB და მართკუთხა ΔBED -დან $|AB|^2-|EA|^2=|BD|^2-|ED|^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow a^2-|EA|^2=(a+1)^2-(|EA|+2)^2 \Leftrightarrow |EA|=\frac{2a-3}{4}.$$

ანალოგიურად $|DF|=\frac{2b-3}{4}$. $|EF|=|EA|+|AD|+|DF|=\frac{2a-3}{4}+2+\frac{2b-3}{4}=\frac{a+b+1}{2}$.

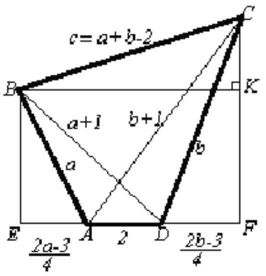
ე.ი. $|EF|=|BK|=|BC|$. მივიღეთ, რომ $ABCD$ მართკუთხედია. ამიტომ

$$|BE|=|CF|\Rightarrow\frac{\sqrt{12a^2+12a-9}}{4}=\frac{\sqrt{12b^2+12b-9}}{4}\Leftrightarrow a(a+1)=b(b+1)\Leftrightarrow a=b.$$

ე.ი. $c=\dfrac{a+a+1}{2}=\dfrac{2a+1}{2}\notin N$.

ეს კი შეუძლებელია. ამიტომ ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.

ამოცანა 4.



მოც: □ $ABCD$ შემოხაზულია წრეწირზე;

$$\begin{cases}|AB|=a;|BD|=a+1;|CD|=b;\\|AC|=b+1;|AD|=2;|BC|=c;.\\a,b,c\in N;\ \ b>a.\end{cases}$$

(□ $ABCD$ -ში ჩახახაზულია წრეწირი).

$\Rightarrow c+2=a+b\Rightarrow c=a+b-2$

$$|EF|=\frac{2a-3}{4}+2+\frac{2b-3}{4}=\frac{2a+2b+2}{4}=\frac{a+b+1}{2}$$

$$\sqrt{c^2-\frac{(a+b+1)^2}{4}}=|CF|-|BE|=\frac{\sqrt{12b^2+12b-9}}{4}-\frac{\sqrt{12a^2+12a-9}}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{4c^2-(a+b+1)^2}=\sqrt{12b^2+12b-9}-\sqrt{12a^2+12a-9}\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left(4(a+b-2)^2-(a+b+1)^2\right)^2=12b^2+12b-9+12a^2+12a-9-$$
$$-2\sqrt{(12b^2+12b-9)(12a^2+12a-9)}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(12b^2+12b-9)(12a^2+12a-9)}=-39-12ab+42a+42b\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{(4b^2+12b-3)(4a^2+4a-3)}=-13-4ab+14a+14b\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(4b^2+12b-3)(4a^2+4a-3)=(-13-4ab+14a+14b)^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 16a^2b^2+16ab^2-12b^2+16a^2b+16ab-12b-12a^2-12a+9=$$
$$=169+16a^2b^2+196a^2+196b^2+104ab-364a-364b-112a^2b-112ab^2+392ba\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 128ab^2-208b^2+128a^2b-480ab+352b-208a^2+352a-160=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8ab^2-13b^2+8a^2b-30ab+22b-13a^2+22a-10=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8ab^2+8a^2b+22b+22a=13b^2+13a^2+30ab+10\qquad(*)$$

$$\text{თუ }\begin{cases}b\ge a>3;\\a,b\in N.\end{cases}\text{ მაშინ }\begin{cases}8ab^2\ge 32b^2>26b^2\ge 13a^2+13b^2;\\8a^2b=8a(ab)\ge 32ab>30ab;\qquad\Rightarrow\\22a+22b>22\cdot3+22\cdot3>10\quad.\end{cases}$$

$$\Rightarrow 8ab^2+8a^2b+22a+22b>13a^2+13b^2+30a+10\quad.$$

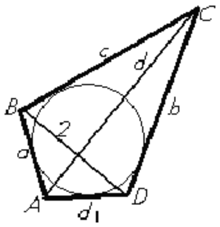
$$ე.ი.\quad \begin{cases} a,b\in N;\\ b\ge a;\\ a\in\{1;2;3\}.\end{cases}$$

$a=1$, $a=2$ და $a=3$ –ის ჩასმით (*)-ში მივიღებთ:

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}8b^2+8b+22b+22=13+13b^2+30b+10;\\ 16b^2+32b+22b+44=52+13b^2+60b+10;\\ 24b^2+72b+22b+66=117+13b^2+90b+10.\end{array}\right.;\\ b\in N.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}5b^2+1=0;\\ b^2-2b-6=0;\\ 13b^2+4b-61=0.\end{array}\right.;\\ b\in N.\end{cases}\Leftrightarrow(b\in\varnothing).$$

ე.ი. ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.

ამოცანა 5. მოც: $ABCD$ შემოხაზულია წრეწირზე;



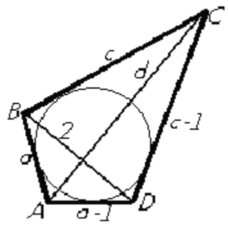
$$\begin{cases}|CD|=b;|AD|=d_1;|AB|=a;\ \ |BC|=c;\ \ |AC|=d;\\ a+b=c+d;\ \ (1)\\ \left[\begin{array}{l}|BD|=2;\\ d_1=2.\end{array}\right.\\ a,b,c\in N\end{cases}.$$

1) თუ $|BD|=2,$, მაშინ სამკუთხედის უტოლობით და (1)-ის გათვალისწინებით გვაქვს:

$$\text{I. }\begin{cases}b=c-1;\\ d_1=a-1.\end{cases};\ \text{II. }\begin{cases}b=c;\\ d_1=a.\end{cases};\ \text{III. }\begin{cases}b=c+1;\\ d_1=a+1.\end{cases}$$

განვიხილოთ თითოეული მათგანი

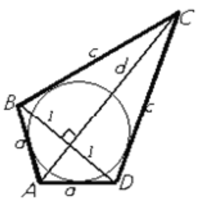
I.



$$\begin{array}{l}(\square ABCD-\text{დან})\\ \\ (\triangle ABC-\text{დან})\end{array}\begin{cases}2+d>c+a-1;\\ d<(c-1)+(a-1);\\ a,c,d\in N.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}c+a-3<d<c+a-2\\ a,c,d\in N.\end{cases}$$

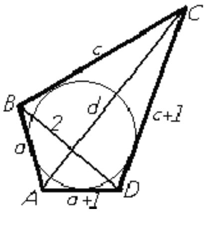
ეს კი შეუძლებელია.

II.



ეს შემთხვევა განხილულია ლემა 1-ში.

III.



$$\begin{array}{l}(\square ABCD-\text{დან})\\ \\ (\triangle ABC-\text{დან})\end{array}\begin{cases}d+2>(a+1)+c;\\ d<a+c;\\ a,c,d\in N.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a+c-1<d<a+c;\\ a,c,d\in N.\end{cases}$$

ეს კი შეუძლებელია.

ე.ი. არ არსებობს წრეწირზე შემოხაზული დიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის დიაგონალის სიგრძე 2-ის ტოლია.

შენიშვნა: შემთხვევა, როდესაც წრეწირში ჩახახაზული დიოფანტური ოთხ-კუთხედის დიაგონალის სიგრძე ტოლია 2-ის, განხილულია მე-**7 ამოცანაში**.

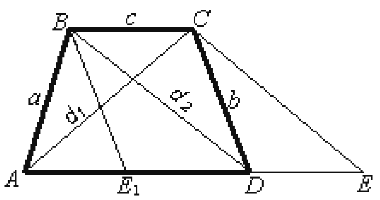
როგორც უკვე იყო აღნიშნული, მთელრიცხვა გეომეტრიული ფიგურების შესწავლით მათემატიკოსები დაინტერისებული იყვნენ ჯერ კიდევ ჩვენს წელ-თაღრიცხვამდე, მიუხედავად ამისა, ამ სფეროში ერთეული გადაჭრილი ამოცანები ისე გვხვდება, როგორც ოაზისები გობის უდაბნოში. ასეთი შედეგის მიზეზი არის ისეთი ერთიანი მეთოდის არ არსებობა, რომელიც მოგვცემდა საშუალებას ყოველი დიოფანტური გეომეტრიული ფიგურის თვისებების შესწავლისათვის ამ ფიგურის მახასიათებელი განტოლებიდან (განტოლებათა სისტემიდან) დახვეწილი ლაკონური ხერხით მიგვეღო შესაბამისი, რამდენადაც შესაძლებელია მარტივი დიოფანტური განტოლება (განტოლებათა სისტემა) და ამასთან მოგვცემდა ამ განტოლებათა (განტოლებათა სისტემის) ამოხსნის ოპტიმალური გზის აღწერას. ამ ნაშრომში ჩვენ შევეხებით ამ საკითხსაც.

ჩვენ მიერ მე-3 §-ში დამტკიცებულია, რომ არ არსებობს ისეთი დიოფანტური n-კუთხედი (n>3), როგორც ამოზნექილი, ასევე ჩაზნექილი, რომლის რომელიმე გვერდის ან რომელიმე დიაგონალის სიგრძე 1-ის ტოლია.

მაშასადამე, **ამოცანა * (n;1)** გადაჭრილია მთლიანად.

როგორც ზემოთ ვნახეთ, k=2-სათვის **ამოცანა* (n;2)**-ის გადაჭრა ურთულეს პრობლემას წარმოადგენს n=4-სათვისაც კი – ანუ ოთხკუთხედების შემთხვევაში. კერძოდ, როგორც ქვემოთ ვნახავთ იმ გამარტივებულ შემთხვევაშიც კი, როდესაც დიოფანტური ოთხკუთხედის ორი გვერდი პარალელურია (დანარჩენი ორი ან პარალელურია, ან არა) k =2-სათვის **ამოცანა* (n; k)**-ს ამოხსნა ერთობ შრომატევადია.

ამოცანა 6. ვიპოვოთ ყველა ისეთი დიოფანტური პარალელოგრამი და დიოფანტური ტრაპეცია, რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე 2-ის ტოლია.



სურ. 6

ცნობილია, რომ ყოველი დიოფანტური ოთხკუთხედის თითოეული გვერდისა და დიაგონალის სიგრძე 1-ზე მეტია, და თუ დიოფანტურ ΔMNP -ში $|MN| = 2$ და $|MP| = |NP| + k$, მაშინ $k \in \{-1\ ;0;\ 1\}$.

ვთქვათ ამოცანის პირობას აკმაყოფილებს $⏢\, ABCD$: $[BC] || [AD];$ $|AB| = a;\ |CD| = b;\ |BC| = c; |AD| = d; |AC| = d_1; |BD| = d_2$.
$a,\ b,\ c,\ d,\ d_1,\ d_2\ \in N \setminus \{1\}$.

გავავლოთ: $[CE] || [BD];\ [BE_1] || [CD];\ E_1 \in [AD];\ D \in [AE]$.

ზოგადობის შეუზღუდავად ვთქვათ $a \le b$ და $d \ge c$. ადვილი საჩვენებელია, რომ $d_1^2 + d_2^2 = a^2 +$ $+b^2 + 2cd$ (1) და $d_2 \ge d_1$ (2)

განვიხილოთ შემდეგი შემთხვევები:

I. $c=2$. ΔABC და ΔBDC -დან გვაქვს: $d_1 \in \{a-1;\ a;\ a+1\}$; $d_2 \in \{b-1;\ b;\ b+1\}$.

ამ შემთხვევაში საკითხის გადასაჭრელად განხილული უნდა იქნეს 9 შემთხვევა, ხოლო როგორც შემდეგ ვნახავთ $a=2$ -ისათვის კი – 27 შემთხვევა. ეს იმდენად შრომატევადი სამუშაოა, რომ ურთულესი პრობლემის გადაჭრის შემთხვევაშიც კი, მუშაობის ყოველგვარ სურვილს დაგიკარგავთ. აქ ჩვენ შემოგთავაზებთ მეთოდს, რომელიც ამ ტიპის ამოცანების ამოხსნისას განსახილველ ვარიანტთა რიცხვს არნახულად ამცირებს.

ვთქვათ $d_1 = a+k$ და $d_2 = b+t$ (3). ცხადია, $k \in \{-1;\ 0;\ 1\}$ და $t \in \{-1;\ 0;\ 1\}$. (3)-ის შეტანით (1)-ში $(a+k)^2 + (b+t)^2 = a^2 + b^2 + 4d$, საიდანაც გამარტივებით მივიღებთ

$$2(2d - ak - bt) = b^2 + t^2. \qquad (4)$$

ცხადია $k^2 + t^2 \neq 0$. ამიტომ (4)-დან იმის გათვალისწინებით, რომ $k,t \in \{-1\ ;\ 0\ ;\ 1\}$, გვაქვს: $k^2 = t^2 = 1$. ე.ი. $k,t \in \{-1;\ 1\}$. (4)-ში შეტანით მივიღებთ ოთხ განტოლებას:

$$2d + a + b = 1 \ (5);\ 2d - a + b = 1 \ (6);\ 2d + a - b = 1 \ (7);\ 2d - a - b = 1 \qquad (8)$$

ΔABE_1 -იდან: $(d-c)+a \geq b$; $(d-c)+b \geq a$ (ტოლობებს ადგილი აქვს, როცა $d=c$ და $a=b$). ე.ი. $d+a-b \geq 2$ და $d-a+b \geq 2$, ანუ (5)-ს, (6)-ს და (7)-ს, მოცემული შეზღუდვებით, არ გააჩნიათ ამონახსნი ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეში. რაც შეეხება (8)-ს, ამ შემთხვევაში $k=t=1$. ე.ი. $d_1 = a+1$ და $d_2 = b+1$. ადვილი საჩვენებელია, რომ

$$(d+c)(a-b)(a+b) = (d-c)(d_1 - d_2)(d_1 + d_2). \qquad (9)$$

(ეს ფორმულა სამართლიანია, როგორც $ABCD$ ტრაპეციისათვის, ასევე $ABCD$ პარალელოგრამისათვის). თუ გავითვალისწინებთ, რომ: $c=2;\ d_1 = a+1;\ d_2 = b+1$ და $a+b=2d$, მაშინ (9)-დან მივიღებთ: $(d+2)(a-b)(2d-1) = (d-2)(a-b)(2d+1) \Leftrightarrow (a-b)\big((d+2)(2d-1)-(d-2)(2d+1)\big)=0 \Leftrightarrow 6(a-b)d=0 \Leftrightarrow a=b$, მაგრამ ამ შემთხვევაში (8)-ის მარცხენა მხარე ლუწი იქნება, მარჯვენა კი – კენტი, რაც შეუძლებელია. ე.ი. $c>2$.

II. $2 = a < c \leq d$ ΔABC, ΔABE_1 და ΔABD -დან მივიღებთ, რომ: $d_1 \in \{c-1;\ c;\ c+1\}$;

$$b \in \{d-c-1;\ d-c;\ d-c+1\};\ d_2 \in \{d-1;\ d;\ d+1\}. \qquad (10)$$

$\angle ABC$ ან $\angle BAD$ არამახვილია, ამიტომ $d_1 = c+1$ ან $d_2 = d+1$. თუ გავითვალისწინებთ იმას, რომ ΔBCD -დან $b+c > d_2$ და $b+c \in \{d-1; d; d+1\}$, მივიღებთ რომ $d_2 < d+1$. ე.ი. დაგვრჩა $d_1 = c+1$. ე.ი. (10) მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$2 = a < c \leq d\ ;\ d_1 = c+1;\ b \in \{d-c-1;\ \ d-c;\ \ d-c+1\};\ d_2 \in \{d-1;\ \ d\}. \qquad (11)$$

აქაც I-ის ანალოგიურად ვთქვათ $b = d-c+m$ და $d_1 = d+n$ (12). ცხადია რომ: $m \in \{-1;\ 0;\ 1\}$ და $n \in \{-1;\ \ 0\}$ (13). (12)-ის (1)-ში ჩასმით მივიღებთ:

$$(c+1)^2 + (d+n)^2 = 2^2 + (d-c+m)^2 + 2dc \Leftrightarrow 2(dm - cm - c - dn + 2) = n^2 - m^2 + 1. \qquad (14)$$

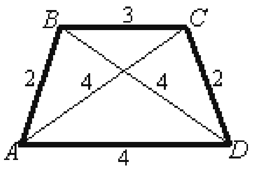
ე.ი. $n^2 - m^2 + 1 \equiv 0(mod\,2)$ (15). (13)-ის (15)-იდან გვაქვს: $n = 0$; $m \in \{-1;\ 1\}$ (16) (თუ $n^2 - m^2 + 1 = 2$, მაშინ $d = c - 1$, რაც შეუძლებელია. ე.ი. $n^2 - m^2 + 1 = 0$, საიდანაც მიიღება (16)). ე.ი.

$$\begin{cases} n^2 - m^2 + 1 = 0; \\ 2(dm - cm - c - dn + 2) = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = 0,\ m \in \{-1;\ 1\}; \\ dm - cm - c + 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -d + c - c + 2 = 0; \\ d - c - c + 2 = 0. \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} d = 2; \\ d = 2c - 2. \end{array} \right.$$

$d = 2$ შეუძლებელია, ვინაიდან $d > c > a = 2$.

$d = 2c - 2$ -ისათვის მივიღებთ: $b = c - 1;\ \ d_2 = 2c - 2;\ \ d_1 = c + 1;\ \ a = 2$. ამ მონაცემების (9)-ში შეტანით მივიღებთ:

$$\begin{cases} (3c-2)(3-c)(c+1) = (c-2)(3-c)(3c-1); \\ c \in N \setminus \{1\}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} c = \dfrac{1}{2}; \\ c = 3. \end{array} \right. \\ c \in N \setminus \{1\}. \end{cases} \Leftrightarrow c = 3.$$



სურ. 7

მაშასადამე ჩვენ მივიღებთ XII3-ზე გამოსახულ ტრაპეციას. (იხ. სურ. 7). (აქ შევნიშნოთ, რომ ეს იყო ნაპოვნი (1989 წელს) პირველი დიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძე ტოლია 2-ის).

III. $d_2 > d_1 = 2$. მაშინ ΔABC, ΔBDC და ΔACE -დან გვაქვს: $a \in \{c-1;\ c;\ c+1\}$; $b \in \{d-1;\ d;\ d+1\}$; $d_2 \in \{d+c-1;\ d+c\}$. ამასთან $d_2 \neq d + c + 1$ ვინაიდან $d_2 < b + c \leq d + c + 1$. აქაც ისევე, როგორც II-ში ვთქვათ: $a = c + l;\ \ b = d + p$ და $d_2 = d + c + k$ (17). ცხადია აქაც $l, p \in \{-1;\ 0;\ 1\}$; $k \in \{-1;\ 0\}$; (18). (17)-ის შეტანით (1)-ში მივიღებთ:

$$2^2 + (d + c + k)^2 = (c + l)^2 + (d + p)^2 + 2cd \Leftrightarrow 2\ \ (ck + dk - lc - dp + 2) = l^2 + p^2 - k^2. \tag{19}$$

(19)-იდან გვაქვს:

$$l^2 + p^2 - k^2 \equiv 0(mod\,2) \Leftrightarrow \left(\{l = p = k = 0\ ,\ \text{ან}\ \begin{cases} l = 0; \\ p = \pm 1; \\ k = -1. \end{cases} \text{ან}\ \begin{cases} p = 0; \\ l = \pm 1; \\ k = -1. \end{cases} \text{ან}\ \begin{cases} k = 0; \\ l = \pm 1; \\ p = \pm 1. \end{cases} \right). \tag{20}$$

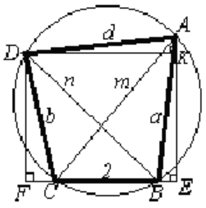
ამ მნიშვნელობათათვის პირველ სამ შემთხვევაში $ck + dk - lc - dp + 2 = 0$ (21_1), ხოლო მეოთხე შემთხვევაში $ck + dk - lc - dp + 2 = 1$ (21_2).

მოსინჯვით ადვილად ვრწმუნდებით, რომ (21_1) და (21_2) , (20) პირობებით, არ არსებობს.

საბოლოოდ გვაქვს, რომ ასეთი დიოფანტური პარალელოგრამი არ არსებობს, ხოლო დიოფანტური ტრაპეციებიდან მხოლოდ ერთადერთი აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას. (იხ. სურ. 7). განვიხილოთ კიდევ ერთი ამოცანა.

ამოცანა 7. ვიპოვოთ წრეწირიში ჩახაზული ყველა ისეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე 2-ის ტოლია.

ვთქვათ $\square ABCD$ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას და მისი რომელიმე გვერდის სიგრძე, ზოგადობის შეუზღუდავად, ვთქვათ:



სურ. 8

$$c = 2; \quad m = a + k; \quad n = b + l\,. \tag{22}$$

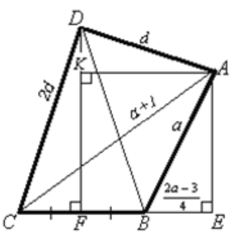
ცხადია $k,l \in \{-1;\ 0;\ 1\}$. (23) პტოლემეას თეორემით გვაქვს: $mn = ab + cd$ (24). (22)-ის (24)-ში ჩასმით და გამარტივებით მივიღებთ $al + bk + lk = 2d$ (25). (23)-ის გათვალისწინებით (25)-იდან გვაქვს: $-b-a+1=2d$ (26); $-b+a-1=2d$ (27); $-b=2d$ (28); $-a=2d$ (29); $0=2d$ (30); $a=2d$ (31); $b-a-1=2d$ (32); $b=2d$ (33); $b+a+1=2d$ (34).

ცხადია (26), (28)-ს (29)-სა და (30)-ს, მოცემული შეზღუდვებით, არ გააჩნიათ ამონახსნები ნატურალურ რიცხვებში. ასევე არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში (27)-ს, ვინაიდან ამ შემთხვევაში ΔABD -დან $|AB| = a < |BD| + |AD| = b+1+d < b+1+2d$. ანალოგიურად მივიღებთ, რომ (32)-ს არ გააჩნია ნატურალურ რიცხვებში ამონახსნი. ახლა ვაჩვენოთ, რომ მოცემული შეზღუდვებით არც (34)-ს გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში. დავუშვათ საწინააღმდეგო. ვთქვათ $\triangle ABCD$ აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას. ამ შემთხვევაში გვაქვს: $|CD| = b$; $|AD| = d = \dfrac{a+b+1}{2}$; $|AB| = a$; $|BC| = 2$; $|AC| = a+1$; $|DB| = b+1$. ავაგოთ: $E,F \in (CB); [DF] \perp (CB) \perp [AE];\ K \in [EA) \perp [DK]$.

მართკუთხა ΔAEB და ΔAEC -დან $|AB|^2 - |BE|^2 = |AE|^2 = |AC|^2 - |CE|^2$. ე.ი. $a^2 - |BE|^2 = (a+1)^2 - (2+|BE|)^2 \Leftrightarrow |BE| = \dfrac{2a-3}{4}$. ანალოგიურად $|FC| = \dfrac{2b-3}{4}$. $|EF| = |FC| + |CB| + |BE| = \dfrac{2a-3}{4} + 2 + \dfrac{2b-3}{4} = \dfrac{a+b+1}{2} = |AD|$. ე.ი. $|DK| = |AD|$ და $|AK| = 0$ ანუ $|DF| = |AE|$.

$$\Rightarrow \sqrt{|AB|^2 - |BE|^2} = \sqrt{|CD|^2 - |FC|^2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - \left(\frac{2a-3}{4}\right)^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{2b-3}{4}\right)^2} \Rightarrow a(a+1) = b(b+1) \Rightarrow a = b\,.$$

$$\text{ე.ი. } d = \frac{a+b+1}{2} = \frac{2a+1}{2} \notin N\,.$$



სურ. 9

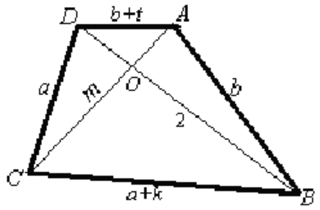
ეს კი შეუძლებელია. ე.ი. ჩვენი დაშვება მცდარია ანუ (34)-ს მოცემული შეზღუდვებით არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში. დაგვრჩა განსახილველი იდენტური განტოლებები (31) და (33).

$$|AE| = 1 + \frac{2a-3}{4}; \quad |DK| = \sqrt{d^2 - \left(\frac{2a+1}{4}\right)^2}\,.\,|AE| = |KF| = \sqrt{\frac{12a^2 + 12a - 9}{4}}\,.$$

$$\sqrt{|DB|^2-|FB|^2}=|DF|=|DK|+|KF|=\sqrt{d^2-\left(\frac{2a+1}{4}\right)^2}+\sqrt{\frac{12a^2+12a-9}{4}}$$

საიდანაც გვაქვს: $\left(\frac{3d^2}{a^2+a}-1\right)^2=0\Leftrightarrow\left((2a+1)^2-12d^2=1\right)$ (*).

ეს შემთხვევა დადის ჩვენ მიერ განხილულ XIV-ზე. ახლა ვთქვათ წრეწირში ჩახაზული დიოფანტური ⏢ $ABCD$ -ის, რომელიმე დიაგონალის სიგრძე, ზოგადობის შეუზღუდავად ვთქვათ:



სურ.10

$$|DB|=2;\quad |AB|=b;\quad |BC|=a+k;\quad |CD|=a;\quad |AD|=b+t\,.$$

ცხადია $t,k\in\{-1;\ 0;\ 1\}$ (35). პტოლემეას თეორემით გვაქვს: $2m=ab+(a+k)(b+t)$ (36) $\Leftrightarrow 2m=2ab+at+bk+kt$.

ΔADC -დან $m<a+b+t$

ე.ი. $2(a+b+t)>2ab+at+bk+kt\Leftrightarrow 2ab+a(t-2)+b(k-2)+t(k-2)<0$.

$$\begin{cases}a>2\ ;\\ b>2\ .\end{cases}\Rightarrow a\ge 3\ge 1{,}5+\frac{4{,}5}{2b-3}=\frac{3b}{2b-3}\Rightarrow 2ab-3a-3b\ge 0$$

ე.ი. $$2ab-3a-3b\ge 2ab+a(t-2)+b(k-2)+t(k-2)\Leftrightarrow t(2-k)\ge a(t+1)+b(k+1)\ge 0\,. \quad (37)$$

(37)-ს, (35) პირობით არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში. ე.ი. $(a-2)(b-2)=0$ (37_1).

ΔAOD და ΔACB -დან სამკუთხედების უტოლობის გამოყენებით ადვილი საჩვენებელია, რომ $|AC|+|BD|>|AB|+|CD|$ ე.ი. $m+2>a+b\ \Rightarrow m>a+b-2\ \Rightarrow \begin{cases}m>a;\\ m>b.\end{cases}$ ე.ი.

$$m\in\{a+1;\ \ a+2;\ \ b+1;\ \ b+2\}\,. \quad (38)$$

(38)-ის გათვალისწინებით (36)-იდან გვაქვს:

$$2=b(a-2)+(a+k)(b+t);\ (39)\quad 4=b(a-2)+(a+k)(b+t); \quad (40)$$

$$2=a(b-2)+(a+k)(b+t);\ (41)\quad 4=a(b-2)+(a+k)(b+t)\,. \quad (42)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ ამ განტოლებებს არ გააჩნია ნატურალურ რიცხვებში ამონახსნი თუ:

$$\begin{cases}a=2;\ \ b\in N\setminus\{1\};\\ k,t\in\{-1;\ \ 0;\ \ 1\}.\end{cases}\ \text{ან}\ \begin{cases}b=2;\ \ a\in N\setminus\{1\};\\ k,t\in\{-1;\ \ 0;\ \ 1\}.\end{cases}$$

ე.ი. საბოლოოდ გვაქვს, რომ წრეწირში ჩახაზული დიოფანტური ოთხკუთხედის თითოეული დიაგონალის სიგრძე 2-ზე მეტია, და 2-ის ტოლი გვერდის მქონე ყველა დიოფანტური ოთხკუთხედი მიიღება, დიოფანტური, $(2a+1)^2-12d^2=1$ (43) განტოლების ამოხსნით

$$\left(\ |AB|=a;\ \ |BC|=2;\ \ |CD|=2d;\ \ |AD|=d;\ \ |DB|=2d;\ \ |AC|=a+1\right). \qquad (44)$$

შევნიშნოთ, რომ ნაპოვნი დიოფანტური ოთხკუთხედებიდან რომელთა რომელიმე გვერდის სიგრძე 2-ის ტოლია, ყველა აღმოჩნდა წრეწირში ჩახაზული. დღეისათვის არ არის ცნობილი ამ სახის დიოფანტური ოთხკუთხედი რომელზედაც არ შემოიხაზება წრეწირი. გაცილებით უარესადაა საქმე იმ დიოფანტურ ოთხკუთხედებთან მიმართებაში, რომელთა რომელიმე დიაგონალის სიგრძე 2-ის ტოლია. ჩვენ ვაჩვენეთ, რომ თუ ისინი არსებობენ, მაშინ მათზე არ შემოიხაზება წრეწირი, მაგრამ რა ხდება სხვა შემთხვევაში, ჩვენთვის არ არის ცნობილი, მიუხედავად იმისა, რომ როგორც ამოცანა-2-ის (I-XVII) განხილვიდან ჩანს, მცდელობა არ დაგვიკლია.

ჩვენ მიერ მე-2 და მე-3 და ამოცანებში ნაჩვენები მეთოდი მართლაც რომ საგრძნობლად ბევრად ამცირებს განსახილველ ვარიანტთა რაოდენობას. ამასთან მკვეთრად არის გამოხატული ხერხი მიღებული დიოფანტური განტოლებების ამოხსნისა. ეს ყოველივე, **ამოცანა*** (**n;k**)-სათვის, ზოგადად ასე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ:

განვიხილოთ *n*-კუთხედის წვეროებისაგან ყველა ის დიოფანტური სამკუთხედი, რომელთა რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი ტოლია *k*-სი, და იმის გათვალისწინებით, რომ დანარჩენი ორი გვერდის სიგრძეთა სხვაობის მოდული არის $\{1;\ 2;\ \cdots;\ k-1\}$ სიმრავლის ელემენტი, ერთ-ერთი გვერდის სიგრძე გამოვსახოთ მეორის სიგრძეს დამატებული t, სადაც $t\in\{-(k-1);\ -(k-2);\ldots;\ 0;\ 1;\ 2;\ldots;\ (k-1)\ \}$;

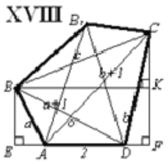
ამ მონაცემების მოცემული *n*-კუთხედის მახასიათებელ განტოლებაში (განტოლებებში) შეტანით მივიღებთ ყველა შესაძლო დიოფანტურ განტოლებას;

მიღებული დიოფანტური განტოლებებიდან გამოხშირვა განტოლებებისა, რომლებსაც, მოცემული შეზღუდვებით, არ გააჩნიათ ამონახსნები ნატურალურ რიცხვებში, ძირითადად მიიღწევა სამკუთხედის უტოლობების გამოყენებით მიღებულ დიოფანტური განტოლებებისთვის დამატებითი შეზღუდვებით და ასევე **ამოცანა*** (*n*; *k*)-ის შედეგების გამოყენებით, რომელიც უკვე გვქონდა მიღებული $\{((k;3));((k;4));\cdots((k;n-1))\}$-სათვის.

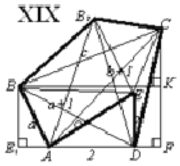
(((*k*; *n*))-ით აღნიშნულია პირობა, რომელსაც აკმაყოფილებს დიოფანტური *n*-კუთხედის გვერდები და დიაგონალები, მაშინ, როცა რომელიმე გვერდის სიგრძე ტოლია k-სი).

დავუბრუნდეთ **ამოცანა*** (*n*; *k*)-ს *k*=2-სათვის.

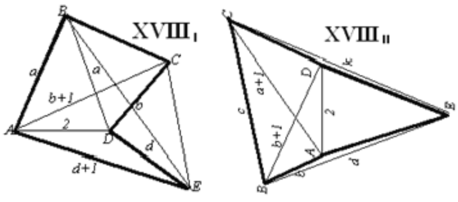
საბოლოოდ გვაქვს, რომ **ამოცანა*** (*n*; 2)-სათვის $n\in\{3;4;5\}$ ამოზნექილი *n*-კუთხედისათვის (თუმცა *n*=5-სათვის არც ერთი ასეთი დიოფანტური *n*-კუთხედი ჯერ არ არის ნაპოვნი. ჩვენი ღრმა რწმენით ასეთი ხუთკუთხედი არ არსებობს) და $n\in\{3;4;5;6\}$ ჩაზნექილი *n*-კუთხედებისათვის (აქაც *n*=5 და *n*=6-სათვის იგივე სურათი გვაქვს, როგორიც *n*=5-სათვის ამოზნექილის შემთხვევაში).



სურ. 11



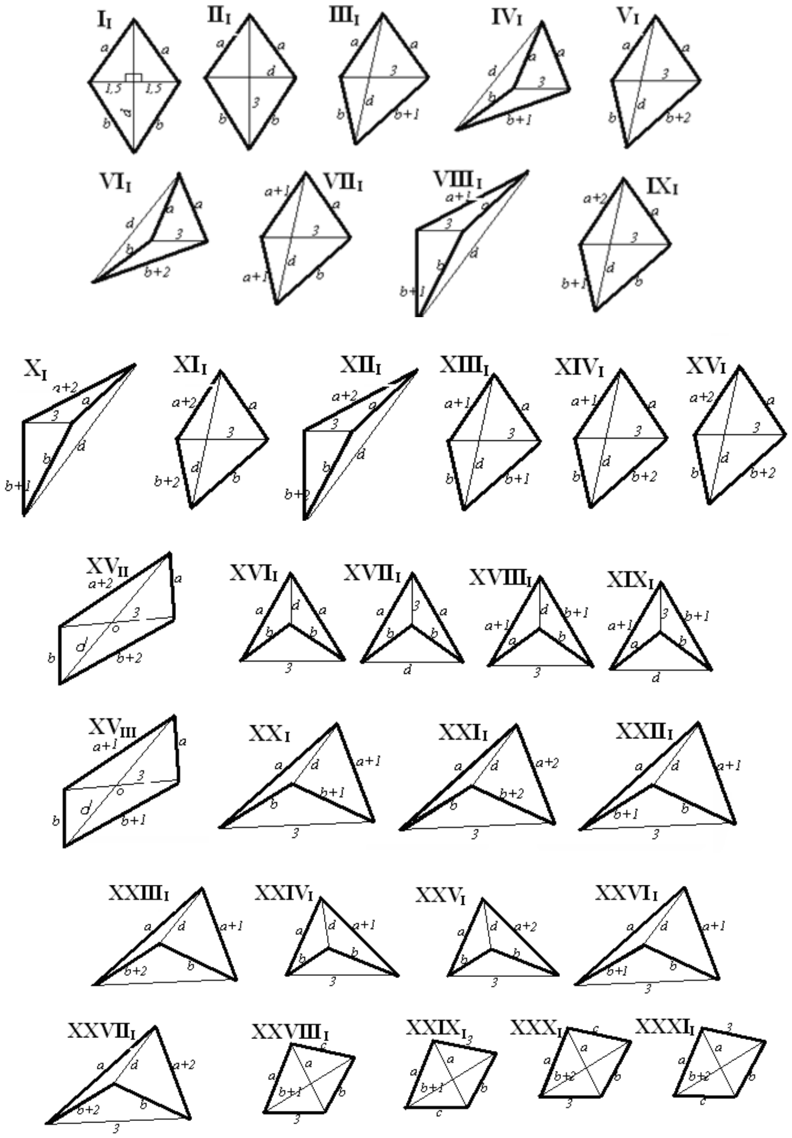
სურ. 12



სურ. 13

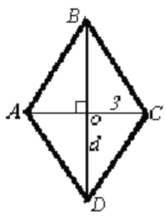
ახლა განვიხილოთ **ამოცანა*** (n;3).

k=2-ის ანალოგიურად, თუ დიოფანტური სამკუთხედის ერთი გვერდი ტოლია 3-ის მაშინ დანარჩენი ორი გვერდის სხვაობის მოდული შეიძლება 0; 1 ან 2-ის ტოლი იყოს. ამის გათვალისწინებით ყველა შესაძლო დიოფანტური ოთხკუთხედები k=3-სათვის მოგვყავს ქვემოთ:



ISSN 1512-0996
www.shromebi.gtu.ge

განვიხილოთ ამათგან ისეთი შემთხვევები, რომელიც აუცილებელია **ამოცანა*** (π;3)-ის საკითხების გადასაჭრელად:



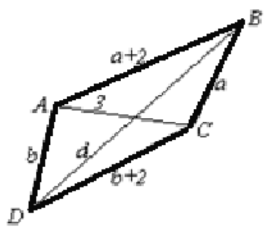
მართკუთხა ΔAOB და ΔAOD -დან გვაქვს:

მოც: $ABCD$

$$\begin{cases} |AB| = |BC| = a; |AD| = |CD| = b; \\ |AC| = 3;\ |BD| = d; \\ a,b,d \in N. \end{cases}.$$

$$\begin{cases} 1.5^2 + (d - |OD|)^2 = a^2 \\ |OD|^2 + 1.5^2 = b^2 \\ a,\ b,\ d \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |OD| = \dfrac{d^2+b^2-a^2}{2d} \\ \left(\dfrac{d^2+b^2-a^2}{d}\right) + 9 = (2b)^2 \\ \dfrac{d^2+b^2-a^2}{d} \equiv q \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (2b-q)(2b+q) = 9 \\ b,\quad q \in N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2.5 \\ q = 4 \\ b,\quad q \in N \end{cases} \Leftrightarrow \left(b \in \varnothing\right)$$

ე.ი. ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.



მოც: $\square\ ABCD$

$$\begin{cases} |AD| = b; |AB| = a+2; |BC| = a; \\ |CD| = b+2;\ |AC| = 3;\ |BD| = d; \\ a,b,d \in N. \end{cases}$$

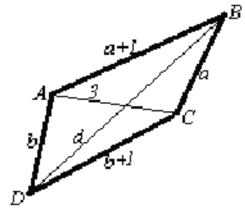
ΔABC და ΔADC -დან კოსინუსების თეორემით:

$$\begin{cases} a^2 = (b+2)^2 + 3^2 - 6(a+2)\cdot \cos B\widehat{A}C \\ (b+2)^2 = b^2 + 3^2 - 6b \cdot \cos C\widehat{A}D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos B\widehat{A}C = \dfrac{2}{3} + \dfrac{1}{6(a+2)} \\ \cos C\widehat{A}D = -\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{6b} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B\widehat{A}C \in \left(0; \arccos\dfrac{2}{3}\right) \\ C\widehat{A}D \in \left(0; \pi - \arccos\dfrac{2}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \left(B\widehat{A}D \in (0;\pi)\right).$$

$$\begin{matrix} (\vartriangle ABD - \text{დან}) \\ \\ (\square ABCD - \text{დან}) \end{matrix} \begin{cases} d < a+b+2 \\ d+3 > a+2+b+2 \Rightarrow \\ a,\ b,\ d \in N \end{cases} \begin{cases} a+b+1 < d < a+b+2 \\ a,\ b,\ d \in N \end{cases} \Rightarrow \left(d \in \varnothing\right).$$

ე.ი. ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.



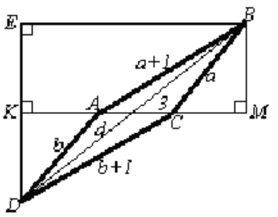
მოც: $ABCD$

$$\begin{cases} |AB| = a+1; |BC| = a; |CD| = b+1; \\ AD = b;\ |AC| = 3;\ |BD| = d; \\ a,b,d \in N. \end{cases}$$

აქაც წინა ამოცანის ანალოგიურად გვაქვს:

$$\begin{cases} \cos B\hat{A}C = \dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3(a+1)} \\ \cos C\hat{A}D = -\dfrac{1}{3}+\dfrac{4}{3b} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B\hat{A}C \in \left(0; \arccos\dfrac{1}{3}\right) \\ C\hat{A}D \in \left(0; \pi - \arccos\dfrac{1}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow C\hat{A}D \in (0;\pi)$$

$$\begin{matrix} (\triangle ABD-\text{დან}) \\ \\ (\square ABCD-\text{დან}) \end{matrix} \begin{cases} d < a+b+1 \\ d+3 > a+1+b+1 \\ a,\ b,\ d \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-1 < d < a+b+1 \\ a,\ b,\ d \in N \end{cases} \Rightarrow d = a+b$$



$$\begin{cases} b^2 - |KA|^2 = (b+1)^2 - (3+|KA|)^2 \\ b^2 - |CM|^2 = (a+1)^2 - (3+|CM|)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

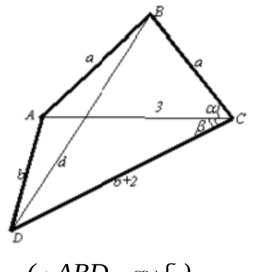
$$\Rightarrow \begin{cases} |KA| = \dfrac{b-4}{3}, \quad |CM| = \dfrac{a-4}{3} \\ |DK| = \sqrt{b^2 - \left(\dfrac{b-4}{3}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{8b^2+8b-16}}{3} \\ |BM| = |EK| = \dfrac{\sqrt{8a^2+8a-16}}{3} \end{cases}$$

მართკუთხა ΔDEB-დან $\left(|BD|^2 = |BE|^2 + |DE|^2\right)$, ე.ი

$$\begin{cases} (b+a)^2 = \left(\dfrac{a+b+1}{3}\right)^2 + \left(\dfrac{\sqrt{8a^2+8a-16} - \sqrt{8b^2+8b-16}}{3}\right)^2 \\ b,\ a \in N \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(8ab+5a-5b+15)+1 = 2\sqrt{(8a^2+8a-16)(8b^2+8b-16)} \\ a,\ b \in N \end{cases}.$$

ეს კი შეუძლებელია ვინაიდან მარცხენა მხარე კენტია, მარჯვენა მხარე თუ ნატურალურია, მაშინ – ლუწი იქნება. ე.ი. ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.



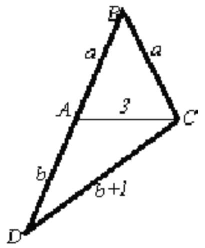
მოც: $ABCD$

$$\begin{cases} |AB| = |BC| = a; \quad |CD| = b+2; \\ |AD| = b; \quad |BD| = d; |AC| = 3; \\ a,b,d \in N. \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (\triangle ABD-\text{დან}) \\ \\ (\square ABCD-\text{დან}) \end{matrix} \begin{cases} |AC|+|BD| > |AB|+|DC|; \\ |AD|+|AB| > |BD|. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3+d > a+b+2; \\ a+b > d; \\ a,\ b,\ d \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b-1 < d < a+b; \\ a,\ b,\ d \in N \end{cases}$$

ეს კი შეუძლებელია. ე.ი. ასეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი არ არსებობს.

ISSN 1512-0996
www.shromebi.gtu.ge



მოც: $\Delta\, DBC$

$$\begin{cases} A\in[BD];|AB|=|BC|=a; \\ |AC|=3; \\ |AD|=b;\ |CD|=b+1; \\ a,b,d\in N. \end{cases}$$

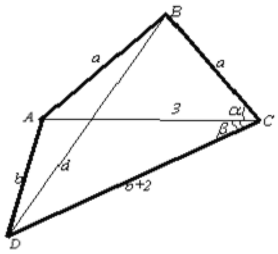
ΔBAC და ΔDAC -დან კოსინუსების თეორემით გვაქვს:

$$\begin{cases} a^2=a^2+3^2-6a\cos B\widehat{A}C; \\ (b+1)^2=b^2+3^2-6b\cos(\pi-B\widehat{A}C);\Rightarrow \\ a,b\in N. \end{cases} \begin{cases} \cos B\widehat{A}C=\dfrac{3}{2a}; \\ \cos B\widehat{A}C=\dfrac{b-4}{3b};\Rightarrow \\ a,b\in N. \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \dfrac{3}{2a}=\dfrac{b-4}{3b}; \\ a,b\in N. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} b=8\cdot\dfrac{a}{2a-9}; \\ a,b\in N. \end{cases}.$$

ვინაიდან $(8;\,2a-9)=1)$, ამიტომ $a\equiv 0$ (mod(2a-9)) $\Rightarrow a\ge 2a-9\Rightarrow a\le 9$.

მოსინჯვით ვპოულობთ, რომ მხოლოდ ორი წყვილი აკმაყოფილებს ამოცანის პირობას: $\begin{cases} a=9 \\ b=8 \end{cases}$ და $\begin{cases} a=5; \\ b=16. \end{cases}$



მოც: $\square ABCD$;

$$\begin{cases} |AB|=|BC|=a;\ \ |CD|=b+2; \\ |AD|=b;\ \ |BD|=d;\ \ |AC|=3;. \\ a,b,d\in N. \end{cases}$$

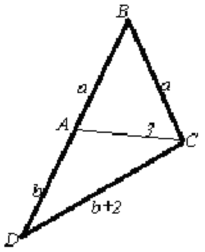
ΔABC და ΔDAC -დან გვაქვს:

$$\begin{cases} \cos\alpha=\dfrac{3}{2a}; \\ (b+2)^2=b^2+3^2-6b\cos\beta \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \cos\alpha\ge\dfrac{3}{4}; \\ \cos\beta=-\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{6b}. \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \alpha\in\left(\arccos\dfrac{3}{4};\dfrac{\pi}{2}\right); \\ \beta\in\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{2\pi}{3}\right). \end{cases}\Rightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta\in\left(\dfrac{\pi}{2}+\arccos\dfrac{3}{4};\ \dfrac{7\pi}{6}\right)$. ე.ი. A და C წერტილები BD წრფის მიმართ შეიძლება მოხვდნენ როგორც ერთ ნახევარსიბრტყეში, ასევე სხვადასხვა ნახევარსიბრტყეშიც.

შემთხვევა, როცა $d=a+b$

ე.ი. $\cos B\widehat{A}C=-\cos C\widehat{A}D$ ანუ $\dfrac{3}{2a}=\dfrac{4b-5}{6b}\Leftrightarrow a=2+\dfrac{b+10}{4b-5}$.

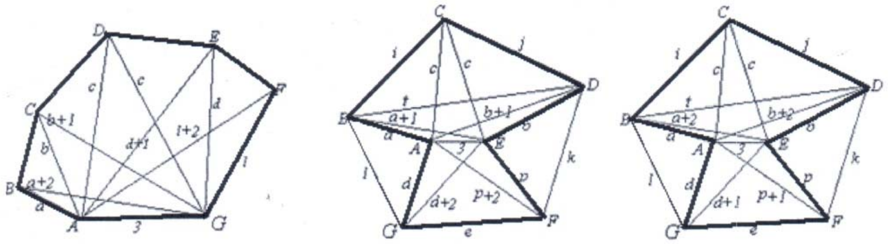


თუ $b > 5$, მაშინ $\frac{b+10}{4b-5} < 1$ და ამიტომ $a \notin N$.

თუ $b \leq 5$, მაშინ $\frac{b+10}{4b-5}$ ნატურალური რიცხვია, როცა

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \text{და} \begin{cases} a = 5 \\ b = 5 \end{cases}$$

ზემოთქმულიდან გამომდინარე **ამოცანა*** (n; 3)-სთვის $3 \leq n \leq 7$. აქვე შევნიშნოთ, რომ k=3-სთვის არ არის ნაპოვნი არც დიოფანტური ხუთკუთხედი, არც დიოფანტური ექვსკუთხედი და არც დიოფანტური შვიდკუთხედი. ჩვენი ღრმა რწმენით ასეთი დიოფანტური ფიგურები არ არსებობს, და თუ არსებობს, მათი სავარაუდო სახე მოგვყავს ქვემოთ:



დასკვნა

ნაშრომში დასმულია და შესწავლილია დიოფანტური n -კუთხედები. ამ სტატიის ავტორი დიოფანტურს უწოდებს მთელრიცხვა n -კუთხედს იმ მოტივით, რომ თითოეული მათგანის კომბინატორული თვისებების დასადგენად საჭიროა გარკვეული დიოფანტური განტოლების (განტოლებათა სისტემის) ამოხსნა. შემსწავლელი ამოცანებიდან ერთ-ერთი ფუნდამენტური ამოცანა.

ამოცანა (n;k): არსებობს თუ არა ყოველი ფიქსირებული k ნატურალური რიცხვისათვის ისეთი დიოფანტური n -კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია k-სი, და თუ არსებობს, მაშინ იპოვეთ ყველა ასეთი n.

ნაჩვენებია, რომ არ არსებობს ისეთი დიოფანტური n -კუთხედი $(n > 3)$, როგორც ამოზნექილი, ასევე ჩაზნექილია, რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია 1-ის. ე.ი. $k = 1$ -სათვის ზემოთხსენებული საკითხი გადაჭრილია.

კვლევის მეშვეობით ნაპოვნია რიგი დიოფანტური ოთხკუთხედები, რომელთა ერთ-ერთი გვერდი ტოლია 2-ის (აქ უნდა შევნიშნოთ, რომ ყოველი მათგანი წრეწირში ჩახაზული აღმოჩნდა). ნაჩვენებია, რომ ყოველი მათგანი წრეწირში ჩახაზული აღმოჩნდა. ნაჩვენებია, რომ არ არსებობს წრეწირი ჩახაზული ისეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის დიაგონალის სიგრძე 2-ის ტოლია. ისეთი დიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის დიაგონალის სიგრძე ტოლია k-ის. ნაჩვენებია, რომ ნებისმიერი ნატურალური $n \geq 3$)-ისათვის მოიძებნება დიოფანტური ოთხკუთხედი, რომლის გვერდის სიგრძე ტოლია k -სი.

ISSN 1512-0996
www.shromebi.gtu.ge

ლიტერატურა

1. Hadamard J. Elementary geometry. Moscow. 1937. (in Russian).
2. Steinhaus H. Problems and reflections. Moscow. 1974. (in Russian).
3. Sierpinski W. Pythagorean triangles. Dover Publications. 2011. (in Russian).
4. Sierpinski W. Elementary theory of numbers. Warsaw. 1959. (in Polish).
5. Vasilyev N.B. and others. Moscow mathematical olympiads. M.: “Nauka”. 1986. (in Russian).
6. Dickson L.E. Introduction to the theory of numbers. Tbilisi. 1941. (in Russian).
7. Ozhigova E.P. What is number theory. Moscow. 1970. (in Russian).
8. Mikhelovich Sh.Kh. Theory of numbers. Moscow. 1962. (in Russian).
9. Shklarsky D.O. and others. Selected problems and theorems of elementary mathematics. Moscow. 1954. (in Russian).
10. Agdgomelashvili Z. Diophantine geometric figures. Problems and solutions from the mathematical tournament of gifted children “Pythagorean Cup 2001-2004”. Publishing house “Tsis-Nami”. Tbilisi. 2004. (in Georgian).
11. Agdgomelashvili Z. Collection of mathematical problems with solutions. Tb.: “Ganatleba”. 1991. (in Georgian).
12. Agdgomelashvili Z. Mathematics (individual and group work). Publishing house “Tsis-Nami”. Tbilisi. 2001. (in Georgian).

UDC 511.5
SCOPUS CODE 2607

About one fundamental task on diophantine geometric figures

Zurab Agdgomelashvili Department of Mathematics, Georgian Technical University, 77 M. Kostava str., 0160 Tbilisi, Georgia
E-mail: diophant_zura@rambler.ru

Reviewers:

Al. Kirtadze, Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU
E-mail: kirtadze2@yahoo.com

M. Mania, Dr. Sci. in Physics and Mathematics, Chief Research Worker, Andrea Razmadze Mathematical Institute of I. Javakhishvili Tbilisi State University
E-mail: mania@rmi.ge

Abstract. The goal of the work is to study one of the fundamental tasks of the study of Diophantine n- gon (the author of the paper considers an integral n-gon is Diophantine as far as determination of combinatorial properties of each of them requires solution of a certain Diophantine equation (equation sets)).

Task *$(n; k)$: if there is a Diophantine n-gon ($n \geq 3$) with any side or diagonal equal to k for each fixed natural number k. In case it exists then let us find each such n.

It is shown that there is no such Diophantine n-gon ($n > 3$), neither convex nor concave, the length of any side or diagonal of which is equal to 1. It means that for k=1 the above mentioned task is solved.

The studies made it possible to find certain Diophantine rectangles, one of the sides of which is equal to 2 (it is noteworthy that all of them appeared to be inscribed in a circumcircle). The studies showed that there is no such Diophantine rectangle inscribed in a circumcircle, the diagonal length of which is equal to 2. It is shown that for any natural ($k \geq 3$) there is a Diophantine rectangle with the side length equal to k.

The fundamental studies showed that for k=2 and n = {3; 4; 5} for convex n-gons (though such Diophantine pentagon has not been found yet. In the author's opinion such pentagon does not exist) and n= {3; 4; 5; 6} for concave n-gons (here as well for n=5 and n=6 no such n-gon has been found yet and for the case of its existence all probable types of such figures are presented).

The paper considers task *$(n; k)$ for $k=3$ and shows that in this case 3≤ n ≤7. However, neither such Diophantine pentagon, nor Diophantine hexagon and Diophantine heptagon have been found yet. In the author's opinion such Diophantine figures do not exist and in case they do then he presents the probable types of them.

Key words: diophantine figures.

UDC 511.5
SCOPUS CODE 2607

Об одной фундаментальной задаче по диофантовым геометрическим фигурам

Зураб Агдгомелашвили
Департамент математики, Грузинский технический университет, Грузия, 0160, Тбилиси, ул. М. Костава, 77
E-mail: diophant_zura@rambler.ru

Рецензенты:

Ал. Киртадзе, профессор факультета информатики и систем управления ГТУ
E-mail: kirtadze2@yahoo.com

М. Мания, главный научный сотрудник, доктор физико-математических наук Института математики имени А. Размадзе ТГУ
E-mail: mania@rmi.ge

Аннотация. В труде поставлена и изучена одна из основных нижеприведенных задач по диофантовым n-угольникам (автор статьи диофантовым называет целочисленный n-угольник, потому что для установления комбинаторных свойств каждого из них требуется решить определенное диофантовое уравнение (систему уравнений).

Задача (n;k): Существует или нет для каждого фиксированного натурального числа такой диофантовый n-угольник ($n \geq 3$), для которого длина некоторой стороны или диагонали равна k, и если существует, то найти все такие n.

Показано, что не существует такой диофантовый n-угольник $(n > 3)$, т.е. для $k = 1$ выше поставленная задача решена.

Тщательным исследованием найден ряд диофантовых четырехугольников сторона которых равна 2-м (все они оказались вписанными в окружность). Показано, что не существует такой вписанный четырехугольник, длина диагонали которого равна 2-м. Показано, что для любой $k \in N$ ($k \geq 3$) существует четырехугольник сторона которого равна k. Фундаментальным исследованием показано, что при $k = 2$, $n \in \{3;4;5\}$ для выпуклых n-угольников (но пока не найден ни один такой диофантовый пятиугольник). По мнению автора такой пятиугольник не существует) и $n \in \{3;4;5;6\}$, для вогнутых n-угольников (аналогично и здесь для $n = 5$ и $n = 6$).

Для $k = 3$ доказано. что $3 \leq n \leq 7$, но не найдено не одно диофантовый пятиугольник, шестиугольник и семиугольник.

Ключевые слова: диофантовые фигуры.

განხილვის თარიღი 15.05.2019
შემოსვლის თარიღი 28.05.2019
ხელმოწერილია დასაბეჭდად 17.12.2019