

UDC 51

SCOPUS CODE 2610

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2025-1-322-333>

ორკომპონენტთან დრეკად ნარევთა თეორიის არაკლასიკური სასაზღვრო ამოცანა ნახევარსიბრტყისათვის

მაია ხარაშვილი მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი,
საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: kharashvilimaia08@gtu.ge

დავით მეტრეველი მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი,
საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: Metrevelidavit08@gtu.ge

რეცენზენტები:

ლ. გიორგაშვილი, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი
E-mail: giorgashvililevan08@gtu.ge

ზ. თედიაშვილი, სტუ-ის, ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის ასოცირებული
პროფესორი
E-mail: z.tediashvili@gtu.ge

ანოტაცია. ნაშრომში განხილულია ორკომპონენტთან დრეკადი ნარევის სასაზღვრო ამოცანა ნახევარსიბრტყისათვის როდესაც არის საზღვარზე მოცემულია კერძო გადაადგილებების მხეზი მდგენელებისა და კერძო ძაბვების ნორმალური მდგენელების ზღვრული მნიშვნელობები. უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში მოცემულია კერძო გადაადგილებისა და მისი წარმოებულების ქრობის გაკვეთილი პირობები. აღნიშნული ზღვრული $(|x| \rightarrow \infty)$ მნიშვნელობები საშუალებას გვაძლევს ერთადერთობის თეორემის დამტკიცების

დროს ვისარგებლოთ გრინის ფორმულებით. ჩვენ ვსარგებლობთ ლაპლასის განტოლებისათვის, ნახევარსიბრტყის შემთხვევაში დირიხლესა და ნეიმანის სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნების წარმოდგენის ფორმულებით. გრინის ფორმულების გამოყენებით დამტკიცებულია ერთადერთობის თეორემა. ამონახსნი მიღებულია პუასონის ფორმულის სახით. სასაზღვრო მონაცემებზე მოთხოვნილია სიგლუვის ის საკმარისი პირობები, რომლებიც უზრუნველყოფს მიღებული ინტეგრალის კრებადობას.

შევნიშნოთ, რომ ნახევარსიბრტყის სასაზღვრო ამოცანები სხვადასხვა მეთოდით შესწავლილია

ლ. გიორგაშვილისა და დ. მეტრეველის [11], ასევე ლ. გიორგაშვილის, ქ. სხვიტარიძისა და მ. ხარაშვილის [13] ნაშრომებში.

12010 მათემატიკის საგნობრივი კლასიფიკაცია. 74G20, 74E30, 74G5.

საკვანძო სიტყვები: ელასტიკური ნარევის თეორია; ნორმალური კომპონენტები; ტანგენციური კომპონენტები; უნიკალურობის თეორემები.

შესავალი

გასული საუკუნის სამოციან წლებში ს. ტრუს-დელმა და რ. ტუპინმა [1] ნაშრომში ჩამოაყალიბეს

დრეკად ნარევთა თეორიის ფუნდამენტური პრინციპები. შემდგომში ამ მოდელმა განიცადა გაფართოება ორი და მეტი კომპონენტის ნარევის სახით. შეიქმნა მოდელები, როგორც სითხე-სითხე [2, 3, 4], ისე მყარი სხეული-მყარი სხეული [2, 3, 4, 5, 6].

ორკომპონენტიან დრეკად ნარევთა თეორიის სასაზღვრო და სასაზღვრო-საკონტაქტო ამოცანები სხვადასხვა კონფიგურაციის მქონე არეებისათვის შესწავლილია მრავალი მეცნიერის მიერ. რადგან შეუძლებელია სრულად ჩამოთვლა დრეკად ნარევთა თეორიაში შესრულებული სამეცნიერო ნაშრომებისა, შემოვიფარგლებით მხოლოდ ნახევარსიბრტყის და ნახევარსიბრტყის შემთხვევაში ჩვენთვის მნიშვნელოვანი ნაშრომების არასრული სიით.

ძირითადი ნაწილი

ძირითადი განტოლებები. ამოცანის დასმა. ერთადერთობის თეორემა.

ორკომპონენტიან დრეკად ნარევთა თეორიის სტატიკის ორგანოზომილებიან განტოლებათა ერთგვაროვან სისტემას აქვს შემდეგი სახე [4], [5].

$$\begin{aligned} a_1 \Delta u'(x) + b_1 \operatorname{grad} \operatorname{div} u'(x) + c \Delta u''(x) + d \operatorname{grad} \operatorname{div} u''(x) &= 0, \\ c \Delta u'(x) + d \operatorname{grad} \operatorname{div} u'(x) + a_2 \Delta u''(x) + b_2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u''(x) &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

სადაც $u' = (u'_1, u'_2)^T$, $u'' = (u''_1, u''_2)^T$ კერძო გადაადგილებებია, Δ არის ლაპლასის ორგანოზომილებიანი ოპერატორი, T – ტრანსპონირების სიმბოლო, $x = (x_1, x_2)$,

$$\begin{aligned} a_1 &= \mu_1 - \lambda_5, \quad b_1 = \mu_1 + \lambda_5 + \lambda_1 - \frac{\rho_2}{\rho} \alpha', \quad a_2 = \mu_2 - \lambda_5, \\ b_2 &= \mu_2 + \lambda_5 + \lambda_2 + \frac{\rho_1}{\rho} \alpha', \quad c = \mu_3 + \lambda_5, \quad \alpha' = \lambda_3 - \lambda_4, \\ d &= \mu_3 + \lambda_3 - \lambda_5 - \frac{\rho_1}{\rho} \alpha', \quad \rho = \rho_1 + \rho_2, \end{aligned} \quad (2)$$

ρ_1, ρ_2 დრეკადი ნარევის კერძო სიმკვრივეებია, $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \lambda_j, j = 1, 2, \dots, 5$ ნარევის მექანიკური თვისებების განმსაზღვრელი ფიზიკური მუდმივებია, რომლებიც ერთმანეთთან დაკავშირებულია შემდეგი უტოლობებით [4]:

$$\mu_1 > 0, \quad \mu_1\mu_2 - \mu_3^2 > 0, \quad \lambda_5 < 0, \quad \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \frac{\rho_2}{\rho}\alpha' > 0, \\ \left(\lambda_1 + \frac{2}{3}\mu_1 - \frac{\rho_2}{\rho}\alpha'\right)\left(\lambda_2 + \frac{2}{3}\mu_2 + \frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right) > \left(\lambda_3 + \frac{2}{3}\mu_3 - \frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right)^2.$$

ამ უტოლობებიდან (2)-ის გათვალისწინებით ვღებულობთ

$$d_1 := a_1a_2 - c^2 > 0, \quad d := (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - (c + d)^2 > 0, \\ a_1 > 0, \quad a_1 + b_1 > 0. \quad (3)$$

ძაბვის $T(\partial, n)U(x)$ ვექტორს აქვს შემდეგი სახე [4]

$$T(\partial, n)U(x) = [P^{(1)}(\partial, n)U(x), P^{(2)}(\partial, n)U(x)]^T, \quad (4)$$

სადაც

$$P^{(1)}(\partial, n)U(x) = T^{(1)}(\partial, n)U'(x) + T^{(2)}(\partial, n)U''(x) \\ P^{(2)}(\partial, n)U(x) = T^{(3)}(\partial, n)U'(x) + T^{(4)}(\partial, n)U''(x) \quad (5)$$

$$T^{(1)}(\partial, n)u' = 2\mu_1 \frac{\partial u'}{\partial n} + \left(\lambda_1 - \frac{\rho_2}{\rho}\alpha'\right)n \operatorname{div} u' - (\mu_1 + \lambda_5)sR(\partial)u', \\ T^{(2)}(\partial, n)u'' = 2\mu_3 \frac{\partial u''}{\partial n} + \left(\lambda_3 - \frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right)n \operatorname{div} u'' - (\mu_3 - \lambda_5)sR(\partial)u'', \\ T^{(3)}(\partial, n)u' = 2\mu_3 \frac{\partial u'}{\partial n} + \left(\lambda_3 - \frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right)n \operatorname{div} u' - (\mu_3 - \lambda_5)sR(\partial)u', \\ T^{(4)}(\partial, n)u'' = 2\mu_3 \frac{\partial u''}{\partial n} + \left(\lambda_2 + \frac{\rho_1}{\rho}\alpha'\right)n \operatorname{div} u'' - (\mu_2 + \lambda_5)sR(\partial)u''.$$

$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{j=1}^2 n_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ნორმალის მიმართულებით წარმოებულია,

$$U = (u', u'')^T, \quad n = (n_1, n_2)^T, \quad s = (-n_2, n_1)^T, \quad R(\partial) = \left(-\frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_1}\right),$$

$T^{(p)}(\partial, n)$ მატრიცული დიფერენციალური ოპერატორი ჩავწეროთ შემდეგი სახით

$$T^{(p)}(\partial, n) = [T_{kl}^{(p)}(\partial, n)]_{2 \times 2}, \quad p = 1, 2, 3, 4, \quad k, l = 1, 2, \quad (6)$$

$$T_{kl}^{(1)}(\partial, n) = a_1 \delta_{kl} \frac{\partial}{\partial x_2} + (a_1 + b_1 - 2\mu_1) \delta_{k2} \frac{\partial}{\partial x_l} + (\mu_1 + \lambda_5) \delta_{2l} \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ T_{kl}^{(2)}(\partial, n) = T_{kl}^{(3)}(\partial, n) = c \delta_{kl} \frac{\partial}{\partial x_2} + (c + d - 2\mu_3) \delta_{k2} \frac{\partial}{\partial x_l} + (\mu_3 - \lambda_5) \delta_{2l} \frac{\partial}{\partial x_k}, \\ T_{kl}^{(4)}(\partial, n) = a_2 \delta_{kl} \frac{\partial}{\partial x_2} + (a_2 + b_2 - 2\mu_2) \delta_{k2} \frac{\partial}{\partial x_l} + (\mu_2 + \lambda_5) \delta_{2l} \frac{\partial}{\partial x_k},$$

სადაც δ_{kl} კრონეკერის სიმბოლოა. აქ ვგულისხმობთ, რომ $n = (0, 1)^T$, $s = (-1, 0)^T$.

Ω^- -ით აღვნიშნოთ $x_2 > 0$ ნახევარსიბრტყე, ხოლო $\partial\Omega$ -ით – $x_2 = 0$ წრფე.

აშოცანა (IV). Ω^- არეში ვეძებთ (1) სისტემის ისეთი რეგულარული $U \in C^2(\Omega^-) \cap C^1(\overline{\Omega^-})$ ვექტორი, რომელიც Ω^- არეში აკმაყოფილებს (1) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას, ხოლო $\partial\Omega$ საზღვარზე შემდეგ სასაზღვრო პირობებს

$$\{n(y) \cdot P^{(1)}(\partial, n)U(y)\}^- = f'_2(y),$$

$$\begin{aligned} \{u'(y) - n(y)(n(y) \cdot u'(y))\}^- &= F'(y), \\ \{n(y) \cdot P^{(2)}(\partial, n)U(y)\} &= f_2''(y), \\ \{u''(y) - n(y)(n(y) \cdot u''(y))\}^- &= F''(y), \\ y = (y, 0) &\in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

უსასრულოდ დაშორებული წერტილის მახლობლობაში $U(x)$ ვექტორი უნდა აკმაყოფილებდეს ქრობის შემდეგ პირობებს

$$\begin{aligned} \text{ა) } U_j(x) &= O(1), \partial_k U_j(x) = O(|x|^{-2}), \\ k &= 1, 2, j = 1, 2, 3, 4, x_2 > 0, |x| \rightarrow \infty, \\ \text{ბ) } U_j(x_1) &= O(1), \partial_1 U_j(x_1) = o(|x|^{-1}), \\ j &= 1, 2, 3, 4, |x_1| \rightarrow \infty, x_2 = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

სადაც $F' = (f'_1, f'_2)^T$, $F'' = (f''_1, f''_2)^T$, $f'_j, f''_j, j = 1, 2, f'_2, f''_2$ საზღვარზე მოცემული ფუნქციებია, $n(y)$ არის $y \in \partial\Omega$, წერტილზე გამავალი Ω^- არის მიმართ შიგა ნორმალის ორტი. ეს ამოცანა პირობითად აღვნიშნოთ $(IV)^-$ -ით.

თეორემა 1 თუ ამოცანა $(IV)^-$ -ს აქვს ამონახსნი, მაშინ იგი ერთადერთია.

დამტკიცება. თეორემა დამტკიცებული იქნება, თუ ვაჩვენებთ, რომ ერთგვაროვან $(f'_j = 0, f''_j = 0, j = 1, 2, f'_2 = 0, f''_2 = 0)$ $(IV)_0^-$ ამოცანას აქვს მხოლოდ ტრივიალური ამონახსნი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\Omega_R := \Omega^- \cap C(O, R)$, სადაც $C(O, R)$ არის წრე ცენტრით კოორდინატთა სათავეში და R რადიუსით $\partial\Omega_R$ -ით აღვნიშნოთ $x_2 > 0$ სიბრტყეში მოთავსებული $C(O, R)$ წრის ნაწილი. ამრიგად, Ω_R -ის საზღვარს წარმოადგენს $\partial\Omega_R$ -სა და $(-R, R)$ სეგმენტის გაერთიანება.

აღვნიშნოთ $A(\partial)$ -ით შემდეგი დიფერენციალური ოპერატორი

$$\begin{aligned} A(\partial) &:= \begin{bmatrix} A^{(1)}(\partial) & A^{(2)}(\partial) \\ A^{(3)}(\partial) & A^{(4)}(\partial) \end{bmatrix}_{4 \times 4} \\ A^{(p)}(\partial) &:= [A_{kj}^{(p)}(\partial)]_{2 \times 2}, \quad p = 1, 2, 3, 4, \end{aligned} \quad (9)$$

$$A_{kj}^{(1)}(\partial) := a_1 \delta_{kj} \Delta + b_1 \partial_k \partial_j,$$

$$A_{kj}^{(2)}(\partial) := A_{kj}^{(3)}(\partial) := c_1 \delta_{kj} \Delta + d \partial_k \partial_j,$$

$$A_{kj}^{(4)}(\partial) := a_2 \delta_{kj} \Delta + b_2 \partial_k \partial_j,$$

სადაც δ_{kj} კრონეკერის სიმბოლოა, $\partial_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, $k = 1, 2$, $\partial = (\partial_1, \partial_2)$

(9) აღნიშვნების გათვალისწინებით (1) განტოლებათა სისტემა გადაიწერება ასე

$$A(\partial)U(x) = 0. \quad (10)$$

(1) სისტემის შესაბამის გრინის ფორმულას Ω_R არეში აქვს შემდეგი სახე [11]

$$\int_{\Omega_R} U(x) \cdot A(\partial) U(x) dx = - \int_{\partial\Omega_R} U(x) \cdot T(\partial, n) U(x) dC(O, R) -$$

$$- \int_{-R}^R \{U(y)\}^- \cdot \{T(\partial, n)U(y)\}^- dy - \int_{\Omega_R} E(U, U) dx, \quad (11)$$

სადაც

$$\begin{aligned} E(U, U) = & (a_1 + b_1 - \mu_1)(\operatorname{div} u')^2 + (a_2 + b_2 - \mu_2)(\operatorname{div} u'')^2 + 2(c + d - \mu_3)\operatorname{div} u' \operatorname{div} u'' \\ & - \lambda_5(R(\partial)u' - R(\partial)u'')^2 + \mu_1 \left(\frac{\partial u'_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} \right)^2 + \mu_2 \left(\frac{\partial u''_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u''_1}{\partial x_2} \right)^2 \\ & + 2\mu_3 \left(\frac{\partial u'_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} \right) \left(\frac{\partial u''_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u''_1}{\partial x_2} \right) + \mu_1 \left(\frac{\partial u'_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \right)^2 + \mu_2 \left(\frac{\partial u''_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u''_1}{\partial x_1} \right)^2 \\ & + 2\mu_3 \left(\frac{\partial u'_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial u''_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u''_1}{\partial x_1} \right). \end{aligned} \quad (12)$$

(2) და (3) უტოლობების გათვალისწინებით (12)-დან ვღებულობთ, რომ $E(U, U) \geq 0$, $x \in \Omega$

მართებულია შემდეგი ტოლობა

$$\begin{aligned} \{U(y) \cdot T(\partial, n)U(y)\}^- &= \{n(y) \cdot u'(y)\}^- \{n(y) \cdot P^{(1)}(\partial, n)U(y)\}^- + \{n(y) \cdot u''(y)\}^- \{n(y) \cdot P^{(2)}(\partial, n)U(y)\}^- \\ &+ \{u'(y) - n(y)(n(y) \cdot u'(y))\}^- \cdot \{P^{(1)}(\partial, n)U(y) - n(y)(n(y) \cdot P^{(1)}(\partial, n)U(y))\}^- \\ &+ \{u''(y) - n(y)(n(y) \cdot u''(y))\}^- \cdot \{P^{(2)}(\partial, n)U(y) - n(y)(n(y) \cdot P^{(2)}(\partial, n)U(y))\}^- = 0. \end{aligned}$$

თუ ამ ტოლობაში გავითვალისწინებთ $(IV)_0^-$ ერთგვაროვანი ამოცანის სასაზღვრო პირობებს, მივიღებთ, რომ

$$\{U(y) \cdot T(\partial, n)U(y)\}^- = 0, \quad y \in \partial\Omega. \quad (13)$$

(10) და (13) ტოლობების გათვალისწინებით (11)-დან ვღებულობთ

$$\int_{\Omega_R} E(U, U) dx + \int_{\partial\Omega_R} U(x) \cdot T(\partial, n)U(x) dC(O, R) = 0.$$

თუ ამ ტოლობის ორივე მხარეს გადავალთ ზღვარზე, როცა $R \rightarrow \infty$ და გავითვალისწინებთ (8) ასიმპტოტიკას, მივიღებთ

$$\int_{\Omega^-} E(U, U) dx = 0. \quad (14)$$

ვინაიდან $E(U, U)$ წარმოადგენს დადებითად განსაზღვრულ კვადრატულ ფორმას, ამიტომ (14)-დან ვღებულობთ

$$E(U, U) = 0, \quad x \in \Omega^-.$$

თუ ამ ტოლობას გავითვალისწინებთ (12)-ში მივიღებთ

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u' &= 0, \quad \operatorname{div} u'' = 0, \\ \frac{\partial u'_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} &= 0, \quad \frac{\partial u''_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u''_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u'_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} = \frac{\partial u''_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u''_1}{\partial x_2}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial u'_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u''_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u''_1}{\partial x_2} = 0, \quad x \in \Omega^-.$$

ამ სისტემის ამონახსნს აქვს შემდეგი სახე

$$u'(x) = a'(-x_2, x_1)^T + b', \quad u''(x) = a'(-x_2, x_1)^T + b'', \quad x \in \Omega^-,$$

სადაც $b' = (b'_1, b'_2)^T$, $b'' = (b''_1, b''_2)^T$ ორკომპონენტიანი ნებისმიერი ვექტორებია, ხოლო a' ნებისმიერი მუდმივია. (8) ასიმპტოტიკის თანახმად $a' = 0$, $b' = 0$, $b'' = 0$, ე. ი. $U(x) = 0$, $x \in \Omega^-$.

(IV)⁻ ამოცანის ამოხსნა

თუ (7) სასაზღვრო პირობებში გავითვალისწინებთ რომ $n(y) = (0, 1)^T$, $s(y) = (-1; 0)^T$, მაშინ იგი ასე გადაიწერება:

$$\begin{aligned} \{u'_1(y)\}^- &= f'_1(y), \quad \{u''_1(y)\}^- = f''_1(y), \\ \left\{ \frac{\partial u'_2(y)}{\partial x_2} \right\}^- &= f^{(1)}_1(y), \quad \left\{ \frac{\partial u''_2(y)}{\partial x_2} \right\}^- = f^{(1)}_2(y), \quad y \in \partial\Omega, \end{aligned} \quad (15)$$

სადაც

$$f^{(1)}_1(y) = \frac{1}{d_2} \left[(a_2 + b_2)f'_2(y) + (c + d)f''_2(y) - \xi_1 \frac{\partial f'_1(y)}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial f''_1(y)}{\partial y} \right],$$

$$f^{(1)}_2(y) = \frac{1}{d_2} \left[(a_1 + b_1)f''_2(y) - (c + d)f'_2(y) - \xi_3 \frac{\partial f'_1(y)}{\partial y} - \xi_4 \frac{\partial f''_1(y)}{\partial y} \right],$$

$$\xi_1 = d_2 - 2\mu_1(a_2 + b_2) + 2\mu_3(c + d), \quad \xi_2 = 2\mu_2(c + d) - 2\mu_3(a_2 + b_2),$$

$$\xi_3 = 2\mu_1(c + d) - 2\mu_3(a_1 + b_1), \quad \xi_4 = d_2 + 2\mu_3(c + d) - 2\mu_2(a_1 + b_1).$$

$\left\{ \frac{\partial u'_2(y)}{\partial x_2} \right\}^-$ და $\left\{ \frac{\partial u''_2(y)}{\partial x_2} \right\}^-$ აღნიშვნებში გვულისხმობთ შემდეგ ზღვრებს

$$\left\{ \frac{\partial u'_2(y)}{\partial x_2} \right\}^- = \lim_{x \rightarrow y \in \partial\Omega} \frac{\partial u'_2(x)}{\partial x_2}, \quad \left\{ \frac{\partial u''_2(y)}{\partial x_2} \right\}^- = \lim_{x \rightarrow y \in \partial\Omega} \frac{\partial u''_2(x)}{\partial x_2}.$$

თუ (1) ტოლობის ორივე მხარეს მოვახდენთ div -ის ოპერაციას, მივიღებთ, რომ

$$\Delta \operatorname{div} u'(x) = 0, \quad \Delta \operatorname{div} u''(x) = 0, \quad y \in \partial\Omega^-, \quad (16)$$

(15) სასაზღვრო პირობებიდან ვღებულობთ, რომ

$$\{\operatorname{div} u'(y)\}^- = f^{(2)}_1(y), \quad \{\operatorname{div} u''(y)\}^- = f^{(2)}_2(y), \quad y \in \partial\Omega, \quad (17)$$

სადაც

$$f^{(2)}_1(y) = \frac{1}{d_2} \left[(a_2 + b_2)f'_2(y) - (c + d)f''_2(y) + (d_2 - \xi_1) \frac{\partial f'_1(y)}{\partial y} - \xi_2 \frac{\partial f''_1(y)}{\partial y} \right],$$

$$f^{(2)}_2(y) = \frac{1}{d_2} \left[(a_1 + b_1)f''_2(y) - (c + d)f'_2(y) - \xi_3 \frac{\partial f'_1(y)}{\partial y} + (d_2 - \xi_4) \frac{\partial f''_1(y)}{\partial y} \right].$$

დირიხლეს (16), (17) სასაზღვრო ამოცანების ამონახსნს Ω^- არეში აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{aligned} \operatorname{div} u'(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_2} \ln r f^{(2)}_1(y) dy, & x \in \Omega^- \\ \operatorname{div} u''(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_2} \ln r f^{(2)}_2(y) dy, & x \in \Omega^- \end{aligned} \quad (18)$$

$$r = \sqrt{(x_1 - y)^2 + x_2^2}.$$

თუ (1) განტოლებებში გავითვალისწინებთ შემდეგ იგივე ტოლობებს $\Delta(x \operatorname{div} u') =$

$$2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u', \quad \Delta(x \operatorname{div} u'') = 2 \operatorname{grad} \operatorname{div} u'',$$

მაშინ მივიღებთ

$$\Delta v'(x) = 0, \quad \Delta v''(x) = 0, \quad x \in \Omega^-, \quad (19)$$

სადაც

$$\begin{aligned} v'(x) &= 2a_1 u'(x) + 2c u''(x) + b_1 x \operatorname{div} u'(x) + dx \operatorname{div} u''(x), \\ v''(x) &= 2c u'(x) + 2a_2 u''(x) + d x \operatorname{div} u'(x) + b_2 x \operatorname{div} u''(x). \end{aligned} \quad (20)$$

დავაგეგმილოთ ∂x_1 ღერძზე (19) ვექტორული ტოლობები, მივიღებთ

$$\Delta v'_1(x) = 0, \quad \Delta v''_1(x) = 0, \quad x \in \Omega^-. \quad (21)$$

მეორეს მხრივ (20) ტოლობებიდან $\{v'_1(y)\}^-$ და $\{v''_1(y)\}^-$ სასაზღვრო პირობებს ექნება შემდეგი სახე

$$\{v'_1(y)\}^- = f_1^{(3)}(y), \quad \{v''_1(y)\}^- = f_2^{(3)}(y), \quad y \in \partial\Omega, \quad (22)$$

სადაც

$$\begin{aligned} f_1^{(3)}(y) &= 2a_1 f'_1(y) + 2c f''_1(y) + b_1 y f_1^{(2)}(y) + d y f_2^{(2)}(y), \\ f_2^{(3)}(y) &= 2c f'_1(y) + 2a_2 f''_1(y) + d y f_1^{(2)}(y) + b_2 y f_2^{(2)}(y). \end{aligned}$$

(21)-(22) დირიხლეს ამოცანების ამონახსნებს აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{aligned} v'_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_2} \ln r f_1^{(3)}(y) dy, \quad x \in \Omega^- \\ v''_1(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x_2} \ln r f_1^{(3)}(y) dy, \quad x \in \Omega^- \end{aligned} \quad (23)$$

(19) ვექტორები დავაგეგმილოთ ∂x_2 ღერძზე, მივიღებთ:

$$\Delta v'_2(x) = 0, \quad \Delta v''_2(x) = 0, \quad x \in \Omega^-. \quad (24)$$

(15) და (17) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით (20) -დან ვღებულობთ

$$\left\{ \frac{\partial v'_2(y)}{\partial x_2} \right\}^- = f_1^{(4)}(y), \quad \left\{ \frac{\partial v''_2(y)}{\partial y} \right\}^- = f_2^{(4)}(y), \quad y \in \partial\Omega, \quad (25)$$

სადაც

$$\begin{aligned} f_1^{(4)}(y) &= 2a_1 f_1^{(1)}(y) + 2c f_2^{(1)}(y) + b_1 f_1^{(2)}(y) + d f_2^{(2)}(y), \\ f_2^{(4)}(y) &= 2c f_1^{(1)}(y) + 2a_2 f_2^{(1)}(y) + d f_1^{(2)}(y) + b_2 f_2^{(2)}(y). \end{aligned}$$

(24)-(25) ნეიმანის ამოცანების ამონახსნებს აქვს შემდეგი სახე

$$\begin{aligned} v'_2(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln r f_1^{(4)}(y) dy, \quad x \in \Omega^-, \\ v''_2(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln r f_2^{(4)}(y) dy, \quad x \in \Omega^-. \end{aligned} \quad (26)$$

(20) ტოლობებიდან ვღებულობთ

$$\begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{2d_1} [a_2 v'(x) - c v''(x) + (cd - a_2 b_1) x \operatorname{div} u'(x) + \\ &\quad + (cb_2 - da_2) x \operatorname{div} u''(x)], \\ u''(x) &= \frac{1}{2d_1} [a_1 v''(x) - c v'(x) + (cb_1 - da_1) x \operatorname{div} u'(x) + \\ &\quad + (cd - a_1 b_2) x \operatorname{div} u''(x)]. \end{aligned} \quad (27)$$

თუ (18), (23) და (26) ტოლობებს გავითვალისწინებთ (27)-ში, მივიღებთ

$$U(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) f(y) dy, \quad x \in \Omega^-, \quad (28)$$

სადაც

$$K(x, y) = \begin{bmatrix} K^{(1)}(x, y) & K^{(2)}(x, y) \\ K^{(3)}(x, y) & K^{(4)}(x, y) \end{bmatrix}_{4 \times 4}, \quad K^{(p)}(x, y) = [K_{ij}^{(p)}(x, y)]_{2 \times 2}, \quad (29)$$

$$p = 1, 2, 3, 4, \quad f = (f', f'')^T, \quad f' = (f'_1, f'_2)^T, \quad f'' = (f''_1, f''_2)^T,$$

$$K_{11}^{(p)}(x, y) = (\delta_{1p} + \delta_{4p}) \frac{\partial \ln r}{\partial x_2} + \xi_{2p-1} x_2 \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x_1^2},$$

$$K_{12}^{(p)}(x, y) = \xi_{2p} x_2 \frac{\partial \ln r}{\partial x_1},$$

$$K_{21}^{(p)}(x, y) = -\left(\frac{\xi_p}{d_2} + \xi_{2p-1}\right) \frac{\partial \ln r}{\partial x_1} + \xi_{2p-1} x_2 \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} K_{22}^{(p)}(x, y) &= \frac{1}{d_2} [\delta_{1p}(a_2 + b_2) - (\delta_{2p} + \delta_{3p})(c + d) + \delta_{4p}(a_1 + b_1) - \\ &\quad - d_2 \xi_{2p}] \ln r + \xi_{2p} x_2 \frac{\partial \ln r}{\partial x_2}, \quad p = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

δ_{lp} კრონეკერის სიმბოლოა,

$$\xi_1 = \frac{1}{2d_1 d_2} [(cd - a_2 b_1)(d_2 - \xi_1) + (a_2 d - b_2 c) \xi_3],$$

$$\xi_2 = \frac{1}{2d_1 d_2} [(cd - a_2 b_1)(a_2 + b_2) + (a_2 d - cb_2)(c + d)],$$

$$\xi_3 = \frac{1}{2d_1 d_2} [(cb_2 - da_2)(d_2 - \xi_4) + (a_2 b_1 - cd) \xi_2],$$

$$\xi_4 = \frac{1}{2d_1 d_2} [(cb_2 - da_2)(a_1 + b_1) + (a_2 b_1 - cd)(c + d)],$$

$$\xi_5 = \frac{1}{2d_1 d_2} [(cb_1 - da_1)(d_2 - \xi_1) + (a_1 b_2 - cd) \xi_3],$$

$$\xi_6 = \frac{1}{2d_1 d_2} [(cb_1 - da_1)(a_2 + b_2) + (a_1 b_2 - cd)(c + d)],$$

$$\xi_7 = \frac{1}{2d_1 d_2} [(cd - a_1 b_2)(d_2 - \xi_4) + (a_1 d - b_1 c) \xi_2],$$

$$\xi_8 = \frac{1}{2d_1 d_2} [(cd - a_1 b_2)(a_1 + b_1) + (a_1 d - b_1 c)(c + d)].$$

(30) ფორმულების მიღების დროს ვისარგებლებთ შემდეგი ტოლობებით

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \ln r \frac{\partial f_j(y)}{\partial y} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln r}{\partial x_1} f_j(y) dy, \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln r}{\partial x_2} \frac{\partial f_j(y)}{\partial y} dy &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x_1 \partial x_2} f_j(y) dy, \\ (x_1 - y) \frac{\partial \ln r}{\partial y} &= x_2 \frac{\partial \ln r}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

გამოვთვალოთ ძაბვის $T(\partial, n)U(x)$ ვექტორი (28)-დან მივიღებთ

$$T(\partial, n)U(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(x, y) f(y) dy, \quad (31)$$

სადაც

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \begin{bmatrix} N^{(1)}(x, y) & N^{(2)}(x, y) \\ N^{(3)}(x, y) & N^{(4)}(x, y) \end{bmatrix}_{4 \times 4} \\ N^{(p)}(x, y) &= \left[N_{kj}^{(p)}(x, y) \right]_{2 \times 2}, \quad p = 1, 2, 3, 4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_{11}^{(p)}(x, y) &= \gamma_{11}^{(p)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x_1^2} + \delta_{11}^{(p)} x_2 \frac{\partial^3 \ln r}{\partial x_1^2 \partial x_2}, \\ N_{12}^{(p)}(x, y) &= \gamma_{12}^{(p)} \frac{\partial \ln r}{\partial x_1} + \delta_{12}^{(p)} x_2 \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ N_{21}^{(p)}(x, y) &= \gamma_{21}^{(p)} \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x_1 \partial x_2} + \delta_{21}^{(p)} x_2 \frac{\partial^3 \ln r}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \\ N_{22}^{(p)}(x, y) &= (\delta_{1p} + \delta_{4p}) \frac{\partial \ln r}{\partial x_2} + \delta_{12}^{(p)} x_2 \frac{\partial^2 \ln r}{\partial x_2^2}, \\ \gamma_{11}^{(1)} &= -a_1 + 2\lambda_5(\xi_5 - \xi_1) - \frac{1}{d_2} [\xi_1(\mu_1 + \lambda_5) + \xi_3(\mu_3 - \lambda_5)], \\ \gamma_{12}^{(1)} &= 2\lambda_5(\xi_6 - \xi_2) + \frac{1}{d_2} [(\mu_1 + \lambda_5)(a_2 + b_2) - (\mu_3 - \lambda_5)(c + d)], \\ \gamma_{21}^{(1)} &= a_1 + b_1 - 2\mu_1 - \frac{1}{d_2} [\xi_1(a_1 + b_1) + \xi_3(c + d)], \\ \gamma_{11}^{(2)} &= -c + 2\lambda_5(\xi_7 - \xi_3) - \frac{1}{d_2} [\xi_2(\mu_1 + \lambda_5) + \xi_4(\mu_3 - \lambda_5)], \\ \gamma_{12}^{(2)} &= 2\lambda_5(\xi_8 - \xi_4) + \frac{1}{d_2} [(\mu_3 - \lambda_5)(a_1 + b_1) - (\mu_1 + \lambda_5)(c + d)], \\ \gamma_{21}^{(2)} &= c + d - 2\mu_3 - \frac{1}{d_2} [\xi_2(a_1 + b_1) + \xi_4(c + d)], \\ \gamma_{11}^{(3)} &= -c + 2\lambda_5(\xi_1 - \xi_5) - \frac{1}{d_2} [\xi_1(\mu_3 - \lambda_5) + \xi_3(\mu_2 + \lambda_5)], \end{aligned}$$

$$\gamma_{12}^{(3)} = 2\lambda_5(\xi_2 - \xi_6) + \frac{1}{d_2}[(\mu_3 - \lambda_5)(a_2 + b_2) - (\mu_2 + \lambda_5)(c + d)],$$

$$\gamma_{21}^{(3)} = c + d - 2\mu_3 - \frac{1}{d_2}[\xi_1(c + d) + \xi_3(a_2 + b_2)],$$

$$\gamma_{11}^{(4)} = -a_2 + 2\lambda_5(\xi_3 - \xi_7) - \frac{1}{d_2}[\xi_2(\mu_3 - \lambda_5) + \xi_4(\mu_2 + \lambda_5)],$$

$$\gamma_{12}^{(4)} = 2\lambda_5(\xi_4 - \xi_8) + \frac{1}{d_2}[(\mu_3 + \lambda_5)(a_1 + b_1) - (\mu_3 - \lambda_5)(c + d)],$$

$$\gamma_{21}^{(4)} = a_2 + b_2 - 2\mu_2 - \frac{1}{d_2}[\xi_2(c + d) + \xi_4(a_2 + b_2)],$$

$$\delta_{11}^{(1)} = 2\mu_1\xi_1 + 2\mu_3\xi_5, \quad \delta_{11}^{(2)} = 2\mu_1\xi_3 + 2\mu_3\xi_7,$$

$$\delta_{11}^{(3)} = 2\mu_3\xi_1 + 2\mu_2\xi_5, \quad \delta_{11}^{(4)} = 2\mu_3\xi_3 + 2\mu_2\xi_7,$$

$$\delta_{12}^{(1)} = 2\mu_1\xi_2 + 2\mu_3\xi_6, \quad \delta_{12}^{(2)} = 2\mu_1\xi_4 + 2\mu_3\xi_8,$$

$$\delta_{12}^{(3)} = 2\mu_3\xi_2 + 2\mu_2\xi_6, \quad \delta_{12}^{(4)} = 2\mu_3\xi_4 + 2\mu_2\xi_8.$$

თუ დავუშვებთ, რომ $f_j'(x), f_j''(x), j = 1, 2$ ფუნქციები აკმაყოფილებს სიგლუვის შემდეგ პირობებს $f_1'(x) \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega), f_1''(x) \in C^{1,\alpha}(\partial\Omega), 0 < \alpha < 1, f_2'(x) \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega), f_2''(x) \in C^{0,\alpha}(\partial\Omega)$ მაშინ (28) ფორმულით განსაზღვრული, $U(x)$ ვექტორი წარმოადგენს (1) სისტემის ამონახსნს Ω^- არეში.

თუ $u_j'(x), u_j''(x), P^{(j)}(x), j = 1, 2$ ფუნქციებში, რომლებიც განსაზღვრულია (28) და (31) ფორმულებით, გადავალთ ზღვარზე, როცა $x \rightarrow z \in \partial\Omega$ ($x_2 \rightarrow 0$) და გავითვალისწინებთ ტოლობას

$$\lim_{x \rightarrow z} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \ln r}{\partial x_2} f(y) dy = -f(z), \quad z \in \partial\Omega,$$

მივიღებთ, რომ (28) ფორმულით განსაზღვრული $U(x)$ ვექტორი აკმაყოფილებს (7) სასაზღვრო პირობებს.

თუ დავუშვებთ, რომ სასაზღვრო ვექტორ-ფუნქციები აკმაყოფილებს პირობებს

$$|f_2'(y)| < \frac{A}{1 + |y|}, \quad |f_2''(y)| < \frac{A}{1 + |y|},$$

$$|f_1'(y)| < \frac{A}{1 + |y|^2}, \quad |f_1''(y)| < \frac{A}{1 + |y|^2}, \quad y \in \partial\Omega, \quad A = \text{const} > 0,$$

მაშინ $U(x)$ ვექტორი განსაზღვრული (28) ფორმულით წარმოადგენს $(IV)^-$ ამოცანის რეგულარულ ამონახსნს, რომელიც უსასრულოდ დამორებული წერტილის მახლობლობაში აკმაყოფილებს ქრობის შემდეგ პირობებს

$$u_1'(x), u_1''(x) = O(|x|^{-1}),$$

$$u_2'(x), u_2''(x) = O(|x|^{-1} \ln|x|),$$

$$\partial_k u_1'(x), \partial_k u_1''(x) = O(|x|^{-1} \ln|x|),$$

$$\partial_k u_2'(x), \partial_k u_2''(x) = O(|x|^{-1}), \quad k = 1, 2.$$

დასკვნა

ნაშრომში შესწავლილია (IV)- ამოცანა, როდესაც ნახევარსიბრტყის საზღვარზე მოცემულია კერძო დაბეჭდვის ნორმალური მდგენელებისა და კერძო

გადაადგილებების მხეზი მდგენელების ზღვრული მნიშვნელობები. ამოცანის ამოხსნები მიღებულია კვადრატურებში.

ლიტერატურა

1. Truesdell, C. Toupin, R. (1960). The classical field theories. With an appendix on tensor fields by J. L. Ericksen. *Handbuch der Physik, Bd. III/1*, 226-793; appendix, 794-858; Berlin: Springer.
2. Crochet, M. Naghdi, P. (1966). On constitutive equations for flow of fluid through an elastic solid. *International Journal of Engineering Science*, Volume 4, Issue 4, 383-401.
3. Atkin, R. (1967). Constitutive theory for a mixture of an isotropic elastic solid and a non Newtonian fluid. *ZAMP. Angew. Math. Phys.*, Vol. 18, 803-825.
4. Green, A. Steel, T. (1966). Constitutive equations for interacting continua. *Int. J. Engng. Sci.* 4, 483-500.
5. Khoroshun, L. Soltanov, N. (1984). Thermoelasticity of two-component mixtures. (Russian) *Naukova Dumka, Kiev*,
6. Hill, R. (1966). Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals. *J. Mech. Phys. Solids*. 13, 89-101.
7. Barber, J. (1983). The solution of elasticity problems for the half-space by method of Green and Collins, *Appl. sci. Res.* 40, No.2, 135-157.
8. Basheleishvili, M. Bitsadze, L. (2010). Explicit solutions of the BVP_s of the theory of consolidation with double porosity for half-space, *Bull. TICMI*, 14, 9-15.
9. Basheleishvili, M., Bitsadze, L. & Jaiani, G. (2013). On fundamental and singular solutions of the system of the plane thermoelasticity with microtemperatures. *Bull. TICMI* vol. 15, 1-20.
10. Bitsadze, L. Jaiani, G. (2012). Theorems for the third and fourth BVP_s of 2D theory of thermoelasticity with microtemperatures. *Nova Science Publishers, Inc.*, pp. 99-118.
11. Giorgashvili, L. Metreveli, D. (2015). Problems of statics of two-component elastic mixtures for a half-space. *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute* vol. 167, 43-61.
12. Constantin, E., Pavel, N. (2010). Green function of the Laplacian for the Neuman Problem in R_+^n *Libertas Math.* 30, 57-69.
13. Giorgashvili, L., Skhvitaridze, K. & Kharashvili, M. (2012). Effective solution of the Neumann boundary value problem for a half-space with double porosity, *Georgian int. Journal of science and technology*, No. 1-2, 161-172.
14. Sherief, H., Saleh, H. (2005). A half-space problem in the theory of generalized thermoelastic diffusion. *Int. J. of Solids and Structures* 42, 4484-4493.
15. Skhvitaridze, K., Kharashvili, M. (2012). Investigation of the Dirichlet and Neumann Boundary value problems for a half-space filled a viscous incompressible fluid. Mechanics of the continuous environment issues, *New York: Published by Nova Science Publishers*, 85-98.

UDC 51

SCOPUS CODE 2610

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2025-1-322-333>

Non-classical Boundary Value Problem of Theory of Elastic Mixtures for Half-plane

Maia Kharashvili

Department of Mathematics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77,
M. Kostava str.

E-mail: kharashvilimaia08@gtu.ge

Davit Metreveli

Department of Mathematics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77,
M. Kostava str.

E-mail: Metrevelidavit08@gtu.ge

Reviewers:

L. Giorgashvili, professor, faculty of informatics and management systems, GTU

E-mail: giorgashvililevan08@gtu.ge

Z. Tediashvili, associate professor, faculty of informatics and management systems, GTU

E-mail: z.tediashvili@gtu.ge

Abstract. In this paper we consider boundary problem for two-component elastic mixture on half-plane, in case when tangents to components to partial displacements and limits of normal components to partial stress values are given along the boundary. In the neighborhood of infinitely distant point conditions for subsiding (disappearance) of partial displacements and their derivatives are given. The limiting values allow for use of Green Theorem as a tool to prove uniqueness theorem. We use Dirichlet and Neumann representation formulas for boundary problem solutions, in case of half-plane, to solve Laplace equation. Uniqueness theorem is proved with the aid of Green Theorem. The solution is given as a Poisson formula. Smoothness conditions on boundary data are sufficient to establish convergence of resulting Integrals. Please also note that boundary problems for semi-planes in their various forms are studied in: L.Giorgashvili, D.Metreveli [11].

12010 Mathematics Subject Classification. 74G20, 74E30, 74G5.

Keywords: latic mixture theory; normal components; tangential components; uniqueness theorems.

განხილვის თარიღი 18.09.2024

შემოსვლის თარიღი 06.12.2024

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25.03.2025