

UDC 502.7

SCOPUS CODE 2303

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2026-1-162-169>

მათემატიკის როლი ეკოლოგიაში

- ვერა აბზიანიძე** საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტის გეოლოგიური მონიტორინგის განყოფილების მეცნიერი თანამშრომელი. საქართველო
E-mail: abzianidze.v@gtu.ge
- რუსუდან მანაგაძე** საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამთო გეოლოგიური და მთის მდგრადი განვითარების ფაკულტეტის პროფესორი. საქართველო
E-mail: r.managadze@gtu.ge
- დიმიტრი აბზიანიძე** საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტის გეოლოგიური მონიტორინგის განყოფილების უფროსი. საქართველო
E-mail: abzianidze.d @gtu.ge
- ზურაბ კაკულია** საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტის გეოლოგიური მონიტორინგის დირექტორი. საქართველო
E-mail: z.kakulia@gtu.ge

რეცენზენტები:

- ზ. ვარაზაშვილი**, ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტი, საინჟინრო გეოლოგიის განყოფილების უფროსი, აკად. დოქტორი
E-mail: z.varazashvili@gtu.ge
- თ. ბარაბაძე**, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ნავთობისა და გაზის ტექნოლოგიების დეპარტამენტის ხელმძღვანელი, პროფესორი
E-mail: t.barabadze@gtu.ge

ანოტაცია. სანამ უშუალოდ პრობლემის განხილვაზე გადავალთ, განვსაზღვროთ მათემატიკოსების როლი გარემოსდაცვით კვლევებში. ზოგადად მიღებულია, რომ მათემატიკა წარმოიშვა ადამიანის

ყოველდღიური პრაქტიკული მოთხოვნილებებიდან კაცობრიობის განვითარების ანდრეულ ეტაპზე.

თანამედროვე მათემატიკური თეორიების აბსტრაქტულობის მიუხედავად, ისინი ბუნებრივად წარმოიშვა ჩვენ გარშემო არსებული სამყაროს შეს-

წავლის პროცესში. მათემატიკა ჩვენი სამყაროს გაგების აუცილებელი ნაწილია.

ეკოლოგების პრობლემა და ამოცანა ისეთი გარემოს შექმნა, სადაც მოსახლეობას შეუძლია ჯანსაღი ცხოვრების წესის წარმართვა. გარემოსდაცვითი პრობლემების გადაჭრის მთავარი სირთულე ისაა, რომ ეკოლოგებს გაურკვეველობის პირობებში უწევთ მოქმედება. გაურკვეველობაში მათემატიკოსები გულისხმობენ სიტუაციას, როდესაც ინფორმაცია ეკოლოგიური სისტემის მდგომარეობის შესახებ მთლიანად ან ნაწილობრივ არ არსებობს. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, სიტუაციებში, როდესაც სისტემაში ხდება გაუთვალისწინებელი მოვლენები, რაც ეკოლოგიური სისტემების გარდაუვალი თანამდევია. უფრო მეტიც, კაცობრიობის მიერ გარემომცველი სამყაროს შესწავლით დაგროვილი ცოდნა გვარწმუნებს, რომ ადამიანის განვითარება ეწინააღმდეგება პლანეტაზე სიცოცხლის პირობების ცვალებადობას. ეკოლოგიაში გაურკვეველობის განსაზღვრა ფორმალური მეთოდების გამოყენებით შეუძლებელია. ასეთ შემთხვევაში, მათემატიკური მეთოდები უფრო ეფექტურია. ამრიგად, მათემატიკოსები გადამწყვეტ როლს ასრულებენ გარემოსდაცვითი პრობლემების შესწავლაში. შედეგად გაჩნდა დისციპლინა მათემატიკური ეკოლოგია.

საკვანძო სიტყვები: ეკოლოგია; მათემატიკური ეკოლოგია; მდინარეების დაბინძურება.

შესავალი

ნაშრომში ავტორები არ განიხილავენ მათემატიკური ეკოლოგიის – მეცნიერების შედარებით ახალი

დარგის – გამოყენებით შესრულებულ სამუშაოს, რადგან ჯერ არ არის დასკვნების გამოტანის დრო.

აღსანიშნავია, რომ ამ დარგის განვითარება განისაზღვრა, ერთი მხრივ, მძლავრი მათემატიკური აპარატის განვითარებით, როდესაც გამოთვლითი მეთოდები აღარ წარმოადგენს სერიოზულ სირთულეებს და მეორე მხრივ, ეკოლოგიაში ახალი, შრომატევადი სამუშაოების გაჩენით. აღნიშნული ნაშრომი ეკოლოგებს გააცნობს, თუ როგორ შეიძლება დღეისათვის უმაღლესი მათემატიკის ფართოდ ცნობილი ელემენტების გამოყენება გარემოს დაცვის პრაქტიკული ამოცანების ამოსახსნელად. იგი განსაკუთრებით სასარგებლო იქნება დამწყები მკვლევრებისთვის.

გარემოსდამცველები მიიჩნევენ, რომ გარემოს დაბინძურებაში მთავარ როლს მდინარეები ასრულებს და რადგან საქართველოში მდინარეების დიდი რაოდენობაა, ეს პრობლემა აქტუალურია. გარემოს დაცვის საკითხების წარმატებით გადასაჭრელად აუცილებელია მდინარეების დაბინძურების ხარისხის დადგენა. მდინარის წყალში სხვადასხვა გზით მოხვერილი ნივთიერებები გვხვდება მყარ, თხევად და აირად მდგომარეობაში. მაგალითად, ნავთობქიმიური ქარხნიდან გამომავალი ჩამდინარე წყლები შეიცავს ორგანულ მჟავებს და მათ მარილებს, ნახშირწყალბადებს, ფენოლის ნაერთებს, კრეზოლებს, ნაფტალინს, ბენზოლს, გოგირდის ნაერთებს და ა.შ. ადამიანსა და გარემოს შორის დამაკავშირებელი რგოლი არის გარემოსდაცვითი ინფორმაცია. ცნობილია საზოგადოების ბუნებასთან ურთიერთობის შემდეგი გარემოსდაცვითი სტრატეგიები: თავდაცვითი (სხვადასხვა გამწმენდი ნაგებობის შექმნა, დახურული ციკლის ტექნოლოგიე-

ბის შემუშავება), კორელაციური (წარმოების პროცესების კოორდინაცია გარემოსდაცვით პროცესებთან) და ბუნებრივი რესურსების ტექნოლოგიზაციის სტრატეგია. მდინარის დაბინძურების დონის დასადგენად ეკოლოგები მნიშვნელოვან ყურადღებას უთმობენ მდინარის მდგომარეობის მონიტორინგსა და კონტროლს. მონიტორინგის ძირითადი მიზნებია ფაქტობრივ პირობებზე დაკვირვება, ანთროპოგენური საქმიანობით გამოწვეული ცვლილებებისა და ტენდენციების იდენტიფიცირება და პროგნოზირება. მონიტორინგის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი ფუნქციაა დამაბინძურებელი ნივთიერებების პრიორიტეტულობის დასაბუთება. დამაბინძურებელი ნივთიერებების პრიორიტეტულობის დასაბუთების შემდეგ შეიძლება შეფასდეს თითოეული ნივთიერების კონცენტრაციის წილი სხვადასხვა დონეზე და სხვადასხვა ფრაქციაში, საერთო კონცენტრაციაში.

ძირითადი ნაწილი

იმისათვის, რომ საქართველო ეკოლოგიურად მდგრადი ქვეყანა გახდეს, აუცილებელია, პირველ რიგში, მისი ეკოლოგიური სისუსტეების დაძლევა და, შემდგომ მისი ეკოლოგიური უსაფრთხოების უზრუნველყოფა. ეკოლოგიურ სისუსტედ იგულისხმება ანთროპოგენური ზემოქმედება. ეკოლოგიური უსაფრთხოების მიღწევა შესაძლებელია ბუნებაზე საერთო ნეგატიური ზემოქმედების მინიმუმამდე დაყვანით, რაც, თავის მხრივ, ხელს შეუწყობს საზოგადოების ეკონომიკურ განვითარებას, ცხოვრების დონის გაუმჯობესებას და ბიუჯეტის შემოსავლების ზრდას. ამიტომ, გარემოს დაცვა ყოველ-

წლიურად სულ უფრო აქტუალური ხდება. განვიხილოთ მისი დაცვის კონკრეტული ზომები, რომელთაგან ერთ-ერთი და ყველაზე მნიშვნელოვანი მდინარის დაბინძურების წინააღმდეგ ბრძოლაა ამ პრობლემის გადაჭრაში მათემატიკოსები ეკოლოგებს დახმარებას სთავაზობენ.

შემოთავაზებული მეთოდოლოგია ეკოლოგებს საშუალებას აძლევს მიიღონ ინფორმაცია მდინარის დაბინძურების დონის შესახებ პერიმეტრის თითოეულ წერტილში.

ეკოლოგიური პროცესების ანალიზისათვის მათემატიკური მეთოდების გამოსაყენებლად, აუცილებელია მოცემული პროცესების გარკვეული მათემატიკური აღწერა, ანუ აღწერა მათემატიკურ ენაზე, რასაც მათემატიკოსები მათემატიკური მოდელის შექმნას უწოდებენ. მოდელების აგება საშუალებას გვაძლევს გავაანალიზოთ ეკოლოგიური პროცესები და გამოვიყენოთ მათი თვისებები საზოგადოების სასარგებლოდ. მდინარის ეკოლოგიური მდგომარეობის დამახასიათებელ მოდელად განვიხილავთ მარტივ მოდელს:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), y(t), z(t)) \quad (1)$$

აქ, $x(t)$ ახასიათებს მდინარის მდგომარეობას დროის მოცემულ t მომენტში; ამ სიდიდეს რეგულირებად ცვლადს ვუწოდებთ. როგორც ცნობილია, ექსპერიმენტული სამუშაოები მნიშვნელოვან საბიუჯეტო ხარჯებს მოითხოვს. y სიდიდე კი არეგულირებს ამ პარამეტრს. რაც შეეხება z -ს, მას შემფოთებას ან შემფოთების პარამეტრს ვუწოდებთ, ანუ იგივე პოტენციური დამაბინძურებლები. რადგან ვვარაუდობთ, რომ მდინარის ორივე მხარეს განლაგებულია, როგორც დასახლებული პუნქტ-

ბი, ისე ქარხნები, f არის არაწრფივი ფუნქცია მისი არგუმენტების მიმართ.

ბუნებრივია, ეკოლოგებს უჩნდებათ კითხვა: რატომ ასეთი მარტივი მოდელი? რთული სტრუქტურის მქონე მოდელის გამარტივება ყოველთვის შესაძლებელია არსებული აპრიორული ინფორმაციის საფუძველზე; ანუ მათემატიკოსები ხელმძღვანელობენ უკიდურესად მარტივი სტრუქტურის შექმნის პრინციპით. ამრიგად, აუცილებელი ხდება განსახილველი რეალური ფიზიკური მოვლენების იდეალიზაცია და გამარტივება. ეს საშუალებას იძლევა გადავიდეთ უფრო მარტივ მოდელზე და უფრო მარტივ გამოთვლებზე.

მოდელებს, რომლებიც ითვალისწინებენ შემთხვევით ფაქტორებს $z(t)$, ალბათური ან სტოქასტური ეწოდება. ასეთ მოდელებში, $x(t)$ სიდიდე შემთხვევითი ცვლადია. პრაქტიკაში, ასეთი მოდელები გამოითვლება მიახლოებით, „ზადის“ მეთოდის გამოყენებით.

სიცხადისთვის, იმისათვის, რომ ეს თეორია ეკოლოგებისათვის უფრო გასაგები იყოს, ვივარაუდოთ, რომ შესასწავლი მდინარე მართკუთხედის ფორმისაა, რომლის გვერდები სასრული სიგრძისაა და წარმოადგენს მდინარის ნაპირებს. დროის მომენტი $t=0$ არის დრო, როდესაც დამკვირვებლები იწყებენ თავიანთ საქმიანობას. მოდელის მიახლოებით გამოსათვლელად, მართკუთხედის მარჯვენა მხარეს (მარჯვენა ნაპირს) წერტილების თანამიმდევრობის გამოყენებით, ვყოფთ მცირე დადებითი მნიშვნელობების მქონე h სიგრძის N რაოდენობის თანაბარ ინტერვალებად, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$, სადაც T არის დაკვირვების დრო. გამყოფი წერტილებიდან T

$= nh$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), ვავლებთ მოპირდაპირე ნაპირის პერპენდიკულარებს.

თითოეულ ინტერვალზე $\{t_{n-1}, t_n\}(t_1, 2, \dots)$, (1) განტოლების ამონახსნების მოსაძებნად, უნდა დავდოთ საწყისი პირობები $x = |_{t=t_{n+1}} = x(n-1)$; მოცემულ შემთხვევაში, გამყოფ წერტილებში მნიშვნელობებს აქვს შემდეგი სახე:

$$x(n) = \varphi(t_{n-1}, y(n), z(n)) \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ მნიშვნელობების მითითებით, ჩვენ განვსაზღვრავთ $x(1), x(2), x(3), \dots$, რითაც ვადგენთ მდინარის მდგომარეობას მოცემულ წერტილებში. ანუ, თუ დამკვირვებელი მოძრაობს მარჯვენა ნაპირზე (h ბიჯით) და მისთვის ცნობილია დაბინძურების დონე გამყოფ წერტილებში, მას შეუძლია სრულად აკონტროლოს სიტუაცია მარჯვენა ნაპირზე. ახლა ჩნდება კითხვა, თუ როგორ უნდა მოხდეს მდინარეზე სიტუაციის სრული მონიტორინგი.

ამოხსნა შემდეგში მდგომარეობს: მდინარის ფუძეს (ორ ნაპირს შორის მანძილს – მდინარის სიგანეს), ვყოფთ ერთი და იმავე h სიგრძის თანაბარ ნაწილებად, როგორც ეს მარჯვენა ნაპირის შემთხვევაშია, წერტილების თანამიმდევრობის წესის გამოყენებით $0 = t < t < \dots < t_N = T$. ამ გამყოფი წერტილებიდან ვავლებთ მდინარის ნაპირების პარალელურ სწორ ხაზებს. შედეგად მდინარე დაფარული იქნება ბადით. პარალელური და პერპენდიკულარული ხაზების გადაკვეთას ვუწოდებთ საკვანძო წერტილებს. ახლა, მკვლევარს, რომელიც მოცემული პარალელების გასწვრივ გადაადგილდება, შეუძლია განსაზღვროს მდინარის დაბინძურების დონე მისი მარჯვენა ნაპირიდან მდინარის მთელი სიგრძის ნებისმიერ წერტილში (2) ფორმულის გამოყენებით.

ზოგადად, (2) ფორმულას აქვს შემდეგი სახე:

$$x_m(n) = \varphi(t_{n-1} y_n^m, z_n^m)$$

$$m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N$$

ამ ფორმულაში m შეესაბამება პარალელური, ხოლო n – პერპენდიკულარული წრფეების რიგით ნომერს.

მაგალითად: $x_7(5) = \varphi(t_4, y_5^7, z_5^7)$

ნიშნავს, რომ დროის $t = 5$ მომენტისათვის ჩვენ ვიმყოფებით მეშვიდე პარალელზე.

უნდა აღინიშნოს, რომ შემოთავაზებული თეორია ძალაში რჩება ნებისმიერი კონფიგურაციისა და სიგრძის მდინარისთვის.

ახლა, ბუნებრივია, ეკოლოგები დარწმუნდნენ, რომ პრობლემის გადაწყვეტა სწორედ მოდელშია – ეკოლოგიური პროცესების მათემატიკური ენით მიახლოებით აღწერაში. მნიშვნელოვანია, რომ შევძლოთ რაც შეიძლება მარტივი მოდელების აგება და პარამეტრების მინიმალური და საჭირო რაოდენობით შემოვიფარგლოთ.

ამრიგად, ეკოლოგიური პროცესების შესწავლისას მათემატიკა ბუნებრივ ინსტრუმენტად იქცევა.

დასკვნა

სტატია წარმოადგენს სტატიების სერიის ნაწილს სახელწოდებით: „მათემატიკოსების როლი პრაქტიკული გარემოსდაცვითი პრობლემების გადაჭრაში“.

მკითხველი გაეცნობა რეალური გარემოსდაცვითი პროცესის აღწერისა და ანალიზის მეთოდს, მისი მათემატიკური იდეალიზაციის გამოწვევებსა და შესაძლებლობებს, მოდელის აგების მეთოდების არჩევას და მათემატიკური მეთოდის გამოყენებას კონკრეტული გარემოსდაცვითი უსაფრთხოების პრობლემის გადასაჭრელად.

სტატიაში წარმოდგენილი კონკრეტული მაგალითი მათემატიკური თვალსაზრისით განსაკუთრებით რთული არ იყო ან, სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, პრობლემას არ წარმოადგენდა. სტატია გვიჩვენებს, დასმული პრობლემების ბუნების შესაბამისად, მათემატიკოსების მიერ შერჩეული მეთოდის როლის მნიშვნელობას გარემოსდაცვით პროცესებზე გავლენის მოხდენაში, ასევე გვიჩვენებს თუ როგორ შეუძლია მათემატიკოსს რეალური დახმარების გაწევა გარემოს დამცველისათვის.

ლიტერატურა

1. Abzianidze, D., Tabatadze, G., Managadze, R., Abzianidze, V., & Inanashvili, N. (2015). *Thinking of mathematicians about the ecology and its problems*. Social Economics: XXI Century's Actual Problems, January–February, 273–275. (In Russian)
2. Abzianidze, D., Managadze, R., Poporadze, N., & Tabatadze, G. (2015). *The use of methods of mathematical ecology for solving problems of environmental protection*. Georgian Technical University. (In Georgian)
3. Abzianidze, V., Abzianidze, D., & Managadze, R. (2018). *On efficiency of application of elements of higher mathematics for the solution of practical tasks of ecological systems safety*. Works of GTU, 4(510), 117–125. (In Russian)
4. Poporadze, N., Abzianidze, D., Dvali, M., & Meskhishvili, T. (n.d.). *Significance of mathematical ecology in the protection of ecologic systems safety*. In *Transaction International Scientific Conference* (pp. 242–244). (In English)
5. Abzianidze, D., Tabatadze, G., & Khudadze, N. (2013). *About use of mathematical modeling in environmental protection*. Business-Engineering, Georgian Technical University, 2, 195–197. (In Georgian)
6. Abzianidze, D., & Managadze, R. (2014). *Application of Kalman-Buss model in processing of observation results of river water conditions*. Georgian Oil and Gas, 29, 17–20. (In Russian)
7. Abzianidze, D., Managadze, R., & Abzianidze, V. (2015). *Application of Kalman filtering during estimation of river water state according to discrete observations*. Georgian Oil and Gas, 30, 108–111. (In Russian)
8. Poporadze, N., Abzianidze, D., & Dvali, M. (2010). *About problems of ecological security and optimization management of ecological system*. Transactions of Georgian Technical University, 2(476), 59–63. (In Russian)
9. Abzianidze, D., Managadze, R., & Abzianidze, V. (2016). *Application of dynamic programming model for solving practical problems of ecological systems security*. Georgian Oil and Gas, 31, 79–82. (In Russian)
10. Poporadze, N., Abzianidze, D., Dvali, M., & Meskhishvili, T. (2010). *Efficiency of ecological monitoring in case of the pollution of river Mtkvari by heavy metals*. Transactions of Georgian Technical University, (477), 17–21. (In Georgian)

UDC 502.7

SCOPUS CODE 2303

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2026-1-162-169>

The Role of Mathematics in Ecology

- Vera Abzianidze** Georgian Technical University, Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Geological Monitoring Department, Researcher, Georgia
E-mail: abzianidze.v@gtu.ge
- Rusudan Managadze** Georgian Technical University, Faculty of Mining Geology and Mountain development, Professor, Georgia
E-mail: r.managadze@gtu.ge
- Dimitri Abzianidze** Georgian Technical University, Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Head of Geological Monitoring Department, Georgia
E-mail: abzianidze.d@gtu.ge
- Zurab Kakulia** Georgian Technical University, Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Monitoring Director, Georgia
E-mail: z.kakulia@gtu.ge

Reviewers:

- Z. Varazashvili**, Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Geological Monitoring Department, Head of Department, Academic Doctor
E-mail: z.varazashvili@gtu.ge
- T. Barabadze**, Georgian Technical University, Head of the Oil and Gas Technology Department, Professor
E-mail: t.barabadze@gtu.ge

Abstract. Before moving on to the direct dialogue, let's define the role assigned to mathematicians in the study of the environment. It is generally accepted that mathematics arose from the everyday practical needs of man at the earliest stages of the development of human society in order to help man in his struggle for existence.

Despite the apparent abstractness of modern mathematical theories, they arose naturally in the process of studying the world around us. Mathematics is a necessary component of our understanding of the world.

The problem and tasks of ecologists are to ensure an environment where the population can lead a healthy lifestyle. The main difficulties in solving environmental problems lie in the fact that ecologists have to act under conditions of uncertainty. By uncertainty, mathematicians mean a situation where information about the possible state of the ecological system is completely or partially absent. In other words, when unforeseen events occur in the system, which is an inevitable companion of ecological systems. In addition, the knowledge that humanity has

accumulated in the study of the world around us convinces us that the course of development of human society contradicts the changing living conditions on the planet. Defining uncertainty in ecology by a formal method is fundamentally impossible; in this case, mathematical methods are most appropriate and effective. Thus, mathematicians play a crucial role in the study of environmental problems. As a result, a discipline such as mathematical ecology has emerged.

Keywords: Ecology; Environment; Mathematics.

განხილვის თარიღი 12.11.25

შემოსვლის თარიღი 01.12.25

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25.03.2026