

UDC 003.63

SCOPUS CODE 2611

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2024-3-237-244>

ვორონოის მოდიფიცირებული დიაგრამა და მისი პრაქტიკაში გამოყენების ალგორითმები

- მერაბ ახოზაძე** ინტერდისციპლინური ინფორმატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: m.akhobadze@gtu.ge
- ელგუჯა კურცხალია** ინტერდისციპლინური ინფორმატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: e.kurtskhalia@gtu.ge
- დავით გეგია** საინჟინრო ეკონომიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: davidgegia@yahoo.com
- მარიკა ბრეგვაძე** ახალგაზრდა მეცნიერთა და სტუდენტთა ინოვაციურ საქმიანობათა ხელშემწყობი ცენტრი „ერთად“, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: m.bregvadze@gtu.ge

რეცენზენტები:

- თ. კაიშაური**, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი
E-mail: t.kaishauri@gtu.ge
- ბ. ბარდაველიძე**, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი
E-mail: bardavelidzekhatuna08@gtu.ge

ანოტაცია. ვორონოის დიაგრამის გამოყენების სფერო საკმაოდ მრავალფეროვანია: ხელოვნური ინტელექტი, ურბანული სისტემები, მარკეტინგი, კომპიუტერული მეცნიერებები და სხვა. ეს განპირობებულია იმით, რომ ე.წ. სივრცული მიმართების

ამოცანები ეფექტურად ამოიხსნება ვორონოის დიაგრამის მეშვეობით.

ვორონოის დიაგრამის კლასიკური მეთოდი გულისხმობს ობიექტების ერთგვაროვნებას, რაც, ცხადია, შორსაა რეალობისაგან და, შესაბამისად, ზღუდავს არა მარტო მისი გამოყენების არეალს, არამედ შესაძლებლობებსაც. ობიექტთა შესახებ

პოტენციური სიმძლავრის დამატებისას ვორონოის მოდიფიცირებული მეთოდი დამატებით იძენს მდგრადი დაგეგმარების, ზონირების და სხვა ფუნქციებსაც.

მაგალითად, კომპიუტერულ თამაშებში, უსაფრთხო გზის დადგენის, „მტრის“ დაჯგუფების მოძებნის, დანიშნულების პუნქტამდე უმოკლესი გზის პოვნის ალგორითმებისათვის (ყველა ეს ამოცანა, განეკუთვნება ე.წ. სივრცული მიმართებების ამოცანების კლასს), ხელოვნური ინტელექტის მოდულად, მოსახერხებელია გამოყენებულ იქნეს ვორონოის დიაგრამა. ვორონოის დიაგრამის გამოყენება ქალაქგეგმარებაში ტრადიციულად მხოლოდ იმ მიზნით ხდება, რომ დადგინდეს, გარკვეული ობიექტების განფენილობის შემთხვევაში, რუკაზე რაიმე ობიექტი (წერტილი) რომელ ანალოგიურ ობიექტთან (წერტილთან) უფრო ახლოსაა. ობიექტთა შესახებ პოტენციური სიმძლავრის დამატებისას ტრადიციულ ვორონოის სქემას ემატება პოტენციური სქემა, რის შემდეგაც ვორონოის მოდიფიცირებული მეთოდი დამატებით იძენს ურბანული სისტემის, ეკონომიკური სივრცის ოპტიმალური დაგეგმარების, უსაფრთხო გზის პოვნის და სხვა ფუნქციებსაც. წარმოდგენილია ვორონოის დიაგრამის მოდიფიცირებული დიაგრამის აგების მეთოდი და განხილულია მისი პრაქტიკული გამოყენების ალგორითმები.

საკვანძო სიტყვები: ვორონოის დიაგრამა; დაგეგმარება; უსაფრთხო გზა.

შესავალი

სივრცული მიმართება ნებისმიერი ინფორმაციაა, რომელიც ახასიათებს ობიექტთა კავშირს სივრცეში. მაგალითად: მანძილებს მათ შორის, გავლენის არეების სიდიდეებს, ობიექტთა რაოდენობას ერთ არეალში და სხვა. ასეთი ინფორმაციის ცოდნა და ანალიზი მეტად სასარგებლოა ხელოვნური ინტელექტისათვის, მით უმეტეს „მებრძოლისათვის“. ვორონოის დიაგრამა აღწერს სივრცულ მიმართებებს ორ მეზობელ წერტილებს (ობიექტებს) შორის. მაგრამ, საკმე ისაა, რომ ვორონოის დიაგრამის კლასიკური მეთოდით ყველა ობიექტი ერთგვაროვანია, რაც, ცხადია, მეტად შორსაა რეალობისაგან. გარდა ამისა, ინფორმაცია გარშემო არსებული „მტრების“ დაჯგუფების, რაოდენობის, საბრძოლო არსენალის სიმძლავრის შესახებ, რომლებიც „მოდის“ სხვადასხვა წყაროდან ხშირად ურთიერთსაწინააღმდეგოა.

ძირითადი ნაწილი

მოკლედ ტრადიციული ვორონოის დიაგრამის შესახებ [6]: ვთქვათ, ვიხილავთ ბრტყელ არეს E , რომელშიც მოცემულია წერტილთა სიმრავლე $\{A_1; A_2; \dots; A_N\}$. ვორონოის დიაგრამა ესაა განსახილველი არის დაყოფა ისეთ E_1, E_2, \dots, E_N სიმრავლეებად, რომ ყოველი $i \in \overline{[1; N]}$ ნატურალური რიცხვისთვის E_i სიმრავლის ნებისმიერი X წერტილიდან A_i წერტილამდე მანძილი არ აღემატება მანძილს X წერტილიდან A_j წერტილამდე, $j \in \overline{[1; N]}, j \neq i$. E_i სიმრავლეს უწოდებენ ვორონოის უჯრედს ან A_i წერტილის „დაფარვის არეს“. ტრადიციულად, „დაფარვის არეების“ გამოყოფა რთული არ არის

$$E_i = E \cap \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N E_{ij} \right),$$

სადაც E_{ij} სიმრავლე განიმარტება შემდეგნაირად: A_i და A_j წერტილების შემაერთებელი მონაკვეთის შუამართობი სიბრტყეს ყოფს ორ ნახევარსიბრტყედ. E_{ij} აღნიშნავს ამ ორიდან იმ ნახევარსიბრტყეს, რომელშიც A_i წერტილი მდებარეობს.

ვორონოის დიაგრამის გამოყენების სფერო საკმაოდ მრავალფეროვანია: გეოლოგია, არქეოლოგია, ბიოლოგია, კარტოგრაფია, მარკეტინგი, ასტრონომია, არქიტექტურა, კომპიუტერული მეცნიერებები, სივრცულ-ეკონომიკური ამოცანები [3,4] და სხვა.

რეალურ სიტუაციებში განსხვავებულ წერტილებს (ობიექტებს) განსხვავებული პოტენციალები აქვს, ამიტომ, უდავოდ საინტერესოა პასუხი შემდეგ კითხვაზე: როგორ ავაგოთ „დაფარვის არეები“ (როგორ ავაგოთ ვორონოის დიაგრამა) იმ შემთხვევაში, როცა განსხვავებულ წერტილებს აქვს განსხვავებული პოტენციალები (წონები).

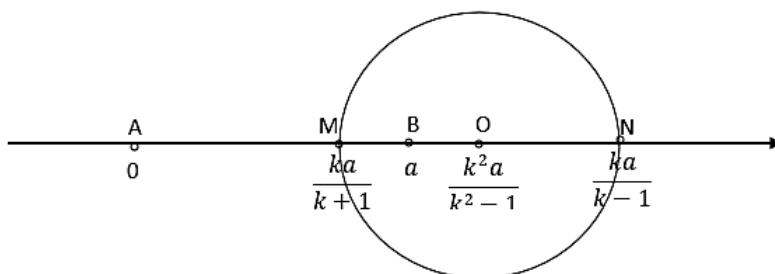
ვთქვათ, p_i აღნიშნავს $A_i(x_i; y_i)$ წერტილის პოტენციალს (წონას). თუ E სიმრავლის რაიმე M წერტილისათვის სრულდება პირობა $\frac{|MA_i|}{|MA_j|} < \frac{p_i}{p_j}$, $i, j \in \overline{[1; N]}, i \neq j$, მაშინ ვიტყვი, რომ M წერტილში

$A_i(x_i; y_i)$ წერტილის გავლენა უფრო დიდია, ვიდრე $A_j(x_j; y_j)$ წერტილისა. თუ E_{ij} სიმბოლოთი აღვნიშნავთ E სიმრავლის ყველა იმ წერტილთა ერთობლიობას, რომლებშიდაც A_i წერტილის გავლენა მეტია, ვიდრე A_j წერტილის, მაშინ, ბუნებრივია, A_i წერტილის „დაფარვის არე“ ვუწოდოთ $E_i = \left(\bigcap_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N E_{ij} \right)$ სიმრავლეს.

ავაგოთ ვორონოის დიაგრამა ნიშნავს, რომ განსახილველი E არე დავყოთ მოცემული მატერიალური წერტილების „დაფარვის არეებად“. ამ ამოცანას ადვილად გადავწყვეტთ, თუ ყოველი $i, j \in \overline{[1; N]}, i \neq j$ -თვის, შევძლებთ $l_{ij} = \left\{ M \in E; \frac{|MA_i|}{|MA_j|} = \frac{p_i}{p_j} \right\}$ წირების აგებას.

მართებულია შემდეგი თეორემა [4]:

თეორემა. თუ სიბრტყის ორ A და B წერტილებს შორის მანძილია a და $k > 1$ რაიმე რიცხვია, მაშინ სიბრტყის ყველა იმ წერტილთა სიმრავლე, რომლებიც A წერტილიდან დაშორებულია k -ჯერ მეტი მანძილით, ვიდრე B წერტილიდან, არის წრეწირი, რომლის რადიუსია $\frac{ka}{k^2-1}$ და რომლის ცენტრი მდებარეობს $(A; B)$ სხივზე A წერტილიდან $\frac{k^2 a}{k^2-1}$ მანძილზე (სურ.1).



სურ. 1

მიღებული შედეგი საშუალებას გვაძლევს ავაგოთ ვორონოის დიაგრამა იმ შემთხვევაში, როცა განსხვავებული წერტილების პოტენციალები არაა აუცილებელი ტოლი იყოს. 2ა და 2ბ სურათებზე მოცემულია ერთი და იგივე რეგიონის (არეს) ვორონოის დიაგრამის ორი განსხვავებული შემთხვევა, კერძოდ 2ა სურ-ზე მოცემულია ვორონოის დიაგრამა იმ შემთხვევაში, როცა წერტილის პოტენციალი უგულებელყოფილია – ყველა წერტილს ტოლი

პოტენციალი აქვს, 2ბ სურ-ზე კი – იგივე რეგიონისათვის ვორონოის დიაგრამა იმის გათვალისწინებით, რომ განსხვავებულ წერტილებს განსხვავებული პოტენციალები (წონები) აქვს. ყოველი $A_i(x_i, y_i)$, $i \in [1; 9]$ ობიექტისათვის (წერტილისათვის), რომელთა მიმართ დგება ვორონოის დიაგრამა, (x_i, y_i) არის A_i წერტილის კოორდინატები, ხოლო p_i – პოტენციალი.



სურ. 2 ა



სურ. 2 ბ

დავუშვათ, რომ ყოველი $i \in \overline{[1; N]}$ -თვის A_i წერტილში განლაგებულია „მტრის“ საცეცხლე პოზიცია, რომლის სიმძლავრეა (პოტენციალია) p_i და მისი შესაძლო „საცეცხლე ზონა“ არის წრე, რომლის რადიუსი პოტენციალის პროპორციულია: $R_i = cp_i$. ჩვენი მიზანია ორ წერტილს შორის მანძილი გავიაროთ მაქსიმალურად უსაფრთხო მარშ-რუტით. როგორ შევარჩიოთ ასეთი მარშრუტი?

ამ კითხვაზე პასუხის გასაცემად ჯერ დავასა-ბუთოთ ასეთი წინადადების მართებულობა: თუ A_i წერტილის ვორონოის E_i უჯრედის რომელიმე M წერტილი არ ეკუთვნის A_i წერტილის „საცეცხლე ზონას“, მაშინ ის არ ეკუთვნის არც ერთ, A_i -გან განსხვავებულ, A_j წერტილის „საცეცხლე ზონას“.

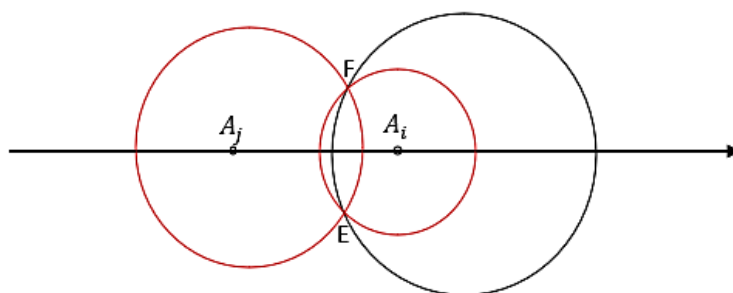
დამტკიცება: უნდა ვაჩვენოთ, რომ თუ $M \in E_i$ და $MA_i > cp_i$, მაშინ $MA_j > cp_j, j \in \overline{[1; N]}, j \neq i$.

რადგან $M \in E_i$, ამიტომ განმარტების თანახმად:

$$\frac{MA_i}{MA_j} < \frac{p_i}{p_j} \Leftrightarrow MA_j > \frac{p_j}{p_i} \cdot MA_i > \frac{p_j}{p_i} \cdot c \cdot p_i = cp_j.$$

რ.დ.გ.

ამ წინადადებიდან გამომდინარეობს, რომ: 1) თუ E და F წერტილები A_i წერტილის „საცეცხლე ზონის“ წრეწირის E_{ij} სიმრავლის საზღვართან გადაკვეთის წერტილებია, მაშინ A_j წერტილის „საცეცხლე ზონის“ წრეწირიც ზუსტად იგივე წერტილებში გადაკვეთს E_{ij} სიმრავლის საზღვარს (სურ. 3):



სურ. 3

2) თუ E_i სიმრავლის (ვორონოის უჯრედის) რომელიმე სასაზღვრო წერტილი არ ეკუთვნის A_i წერტილის „საცეცხლე ზონას“, მაშინ ის არ ეკუთვნის არც ერთ, A_i -გან განსხვავებულ, A_j წერტილის „საცეცხლე ზონას“.

ზემოთქმულიდან გამომდინარე, თუ ყოველი $i \in \overline{[1; N]}$ -თვის წითელი ფერით მოვნიშნავთ E_i სიმრავლის იმ წერტილებს, რომლებიც ეკუთვნის A_i წერტილის „საცეცხლე ზონას“, მაშინ მივიღებთ „უსაფრთხო უბნების“ სრულ სურათს და უკვე

მწელი აღარ იქნება შესაძლო უსაფრთხო გზის მოძებნა.

მიღებული შედეგების პრაქტიკაში გამოყენებისათვის აუცილებელია ობიექტების პოტენციალების განსაზღვრა. ჩვენ მიერ შექმნილ ალგორითმში ყოველი წერტილი (ობიექტი) არის ვექტორი, რომლის კოორდინატებია ობიექტის მახასიათებელი პარამეტრების რიცხვითი მნიშვნელობები (ეს პარამეტრები, იმის მიხედვით თუ რა სახის ამოცანას განვიხილავთ, შეიძლება იყოს განსხვავებული

ბუნების, მაგალითად გაზი, ელექტროენერგია და სხვა): $A_i(p_{i1}; p_{i2}; \dots; p_{in_i})$. ვთქვათ, m_{ij} აღნიშნავს A_i ობიექტის სიმძლავრეს j -ური მახასიათებელი პარამეტრის მიმართ. თუ ჩვენთვის ცნობილია m_{ij} სიდიდეების რიცხვითი მნიშვნელობები, მაშინ თითოეული კოორდინატის რიცხვითი მნიშვნელობა გამოითვლება ფორმულით:

$$p_{ij} = \frac{m_{ij}}{\sum_{k=1}^m m_{ik}}$$

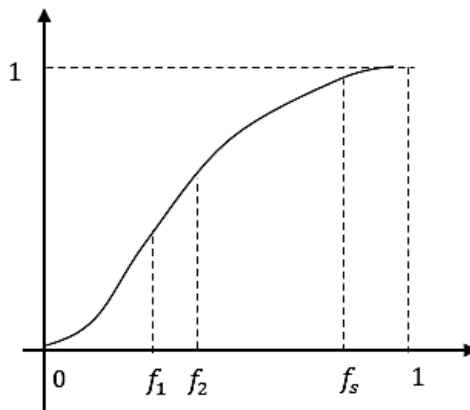
ხოლო A_i ობიექტის პოტენციალის რიცხვითი მნიშვნელობა (მოდული) განისაზღვრება აღნიშნული ვექტორის კოორდინატების მეშვეობით, როგორც ვექტორის სიგრძე:

$$P_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n_i} (p_{ij})^2}$$

იმ შემთხვევაში, როცა არაა ცნობილი m_{ij} სიდიდეების რიცხვითი მნიშვნელობები, ობიექტის პოტენციალის გამოსათვლელად ვსარგებლობთ არამკაფიო სიმრავლეთა თეორიის ელემენტებით.

ვთქვათ, არსებობს ინფორმაციის $I_1; I_2; \dots; I_s$ წყაროები. ვიხილავთ არამკაფიო F სიმრავლეს – „ინფორმაცია არის სანდო“ და დავუშვათ, რომ $\mu_F(I_i) = f_i$. i -ური წყაროს სანდოობა – f_i სიდიდეების მნიშვნელობა, მაგალითად, შეიძლება გამოვთვალოთ შემდეგნაირად: ვთქვათ, i -ური წყაროდან ადრე მიღებული გვექონდა $I_1^i; I_2^i; \dots; I_k^i$ ინფორმაციები, რომელთა გაზომვის შედეგებია: $\|I_{*1}^i\|; \|I_{*2}^i\|; \dots; \|I_{*k}^i\|$, ხოლო რეალური მონაცემებია – $\|I_{r1}^i\|; \|I_{r2}^i\|; \dots; \|I_{rk}^i\|$. გამოვთვლით თითოეული ამ ინფორმაციის ფარდობით ცდომილებას: $\frac{\|I_{rk}^i\| - \|I_{*k}^i\|}{\|I_{rk}^i\|}$. თუ აღვნიშნავთ $f_{*k}^i = 1 - \frac{\|I_{rk}^i\| - \|I_{*k}^i\|}{\|I_{rk}^i\|}$, მაშინ f_i შეიძლება ჩავთვალოთ f_{*k}^i სი-

დიდეების საშუალოს ტოლად: $f_i = \frac{f_{*1}^i + f_{*2}^i + \dots + f_{*k}^i}{K}$. ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია დავუშვათ, რომ f_i რიცხვები დალაგებულია ზრდის მიხედვით.



სურ.4

თუ რაიმე ობიექტის შესახებ ინფორმაცია მივიღებთ $I_1; I_2; \dots; I_k$ წყაროებიდან, მაშინ ზადეს მიერ შემოთავაზებული წესების თანახმად [5,6]:

$$\begin{aligned} \mu_F(I_1 + I_2 + \dots + I_k) &= \\ &= \max\{\mu_F(I_1); \mu_F(I_2); \dots; \mu_F(I_k)\}, \end{aligned}$$

ვირჩევთ იმ წყაროს, რომელზედაც მიკუთვნების ფუნქცია დეზულობს უდიდესს მნიშვნელობას (ჩვენი დაშვების შემთხვევაში ეს იქნება I_k წყარო). თუ ამ წყაროს მიერ მოწოდებული ინფორმაციით A_i ობიექტის პოტენციალის რიცხვითი მნიშვნელობაა P_i , მაშინ განსახილველი ობიექტის პოტენციალი ეკუთვნის $[P_i'; P_i'']$, სადაც P_i' და P_i'' სიდიდეების მნიშვნელობები დამოკიდებულია f_{ik} და P_i სიდიდეებზე, რომლებიც შესაძლებელია გამოვთვალოთ შემდეგნაირად: $P_i' = f_{ik} \cdot P_i$, $P_i'' = \min\left\{\frac{P_i}{f_{ik}}; P_i^*\right\}$, სადაც P_i^* აღნიშნავს პოტენციალის შესაძლო მაქსიმალურ მნიშვნელობას (ვთვლით, რომ წერტილის პოტენციალი არ შეიძლება იყოს დიდი). თუ ერთსა

და იმავე სურათზე ავარგებთ ვორონოის დიაგრამას და „საცეცხლე ზონებს“ P_i' და P_i'' პოტენციალების მნიშვნელობებისათვის და შემდეგ შესაბამის საცეცხლე ზონებს, მაშინ უსაფრთხო ზონებთან ერ-

თად გვექნება „რისკის ზონაც“. მე-5 სურათზე მუქი წითელი ფერით მონიშნულია „საცეცხლე ზონები“, ხოლო ღია ვარდისფერით – „რისკის ზონები“.



საცეცხლე ზონა რისკის ზონა

სურ. 5

დასკვნა

წარმოდგენილი ვორონოის დიაგრამის მოდიფიცირებული მოდელი აფართოებს მისი პრაქტიკული

გამოყენების არეალს და სხვადასხვა ამოცანის ოპტიმალურად გადაჭრის საშუალებას იძლევა.

ლიტერატურა

1. Akhobadze, M., Kurtskhalia, E. (2022). Mathematical Model of Urban Planning for Sustainable Development and Reconstruction of the City. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 16(1), pp.7-9.
2. Akhobadze, M. (2017). *Mathematical foundations of the theory of fuzzy sets: fuzzy algorithms*. Tbilisi: GTU. (In Georgian).
3. Akhobadze, M., Abralava, A., Kurtskhalia, E. (2023). Planning a sustainable urban system based on a modified Voronoi diagram. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, 17(4).;
4. Akhobadze, M., Kvitsinashvili, G. (2023). For optimal planning of the space surrounding cultural heritage monuments. *Automated Management Systems*, 1(35). (In Georgian);
5. Zadeh, L. (1965). Fuzzy Sets. *Information and control*, 8, pp. 338–353.
6. Zadeh, L. (1971). Similarity relations and fuzzy orderings. *Information sciences*, 3, pp. 177–200.
7. Zakharkin, I. (2016). *Voronoi Diagram and Its Applications*. Retrieved from: <https://habr.com/ru/post/309252/>

UDC 003.63

SCOPUS CODE 2611

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2024-3-237-244>

Modified Voronoi Diagram and Algorithms for its Application in Practice

- Merab Akhobadze** Department of Interdisciplinary Informatics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77, M. Kostava str.
E-mail: m.akhobadze@gtu.ge
- Elguja Kurtskhalia** Department of Interdisciplinary Informatics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77, M. Kostava str.
E-mail: e.kurtskhalia@gtu.ge
- Davit Gegia** Department of Engineering Economics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77, M. Kostava str.
E-mail: davidgegia@yahoo.com
- Marika Bregvadze** Center for the Promotion of Innovative Activities of Young Scientists and Students „Together“, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77, M. Kostava str.
E-mail: m.bregvadze@gtu.ge

Reviewers:

T. Kaishauri, Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU

E-mail: t.kaishauri@gtu.ge

Kh. Bardavelidze, Associate Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU

E-mail: bardavelidzekhatuna08@gtu.ge

Abstract. The scope of application of the Voronoi diagram is quite diverse: artificial intelligence, urban systems, marketing, computer science and others. This is because the so-called spatial relationships are effectively solved using a Voronoi diagram. The classical Voronoi diagram method assumes homogeneity of objects, which, obviously, is far from reality and therefore limits not only the scope of its application, but also its possibilities. When adding potential power about objects, a potential scheme is added to the traditional Voronoi diagram, after which the modified Voronoi method additionally acquires the functions of optimal planning of the urban system, economic space, finding a safe path, etc. The article presents a method for constructing a modified Voronoi diagram and discusses algorithms for its practical use.

Keywords: planning; safe way; Voronoi diagram.

განხილვის თარიღი 22.04.2024

შემოსვლის თარიღი 24.04.2024

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 26.09.2024