

UDC 502.7

SCOPUS CODE 2303

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2026-3-177-183>

არასრული ინფორმაციის შემთხვევაში ეკოლოგიური სისტემების მართვის პრობლემების შესახებ (დისკრეტული დროის შემთხვევა)

ვერა აბზიანიძე	საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტის გეოეკოლოგიური მონიტორინგის განყოფილების მეცნიერი თანამშრომელი, საქართველო E-mail: abzianidze.v@gtu.ge
ზურაბ კაკულია	საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტის დირექტორი, საქართველო E-mail: z.kakulia@gtu.ge
რუსუდან მანაგაძე	საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამთო-გეოლოგიური და მთის მდგრადი განვითარების ფაკულტეტის პროფესორი, საქართველო E-mail: r.managadze@gtu.ge
დემეტრი აბზიანიძე	საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტის გეოეკოლოგიური მონიტორინგის განყოფილების უფროსი, საქართველო E-mail: abzianidze.d@gtu.ge

რეცენზენტები:

ზ. ვარაზაშვილი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტის საინჟინრო გეოლოგიის განყოფილების უფროსი, აკად. დოქტორი
E-mail: z.varazashvili@gtu.ge

დ. ჩუტკერაშვილი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ჰიდროგეოლოგიისა და საინჟინრო გეოლოგიის ინსტიტუტის უფროსი მეცნიერი თანამშრომელი, აკად. დოქტორი
E-mail: d.chutkerashvili@gtu.ge

ანოტაცია. მათემატიკის ახალი მიმართულების განვითარების სტიმული შეიძლება იყოს ბუნების-მეტყველების, ინჟინერიის, ეკონომიკის, ეკოლოგიისა და სხვა გამოყენებითი დარგების მოთხოვნები,

ასევე თავად მათემატიკის საჭიროება. ახალი რთული ამოცანების გადაჭრისაკენ მისწრაფება აფართოებს და ავითარებს მათემატიკის სხვადასხვა მიმართულებას. მათემატიკური პროგრამირების, ოპტიმიზაციისა და მართვის საკითხები წამოიწია თანა-

მედროვე მათემატიკის წინა პლანზე ისეთი სფეროების საჭიროებებიდან გამომდინარე, როგორიცაა ეკონომიკური და გარემოსდაცვითი მენეჯმენტი, ავტომატიზებული ტექნიკური მოწყობილობების რეგულირება, სიგნალისა და მოძრავი ობიექტების ამოცნობა და მრავალი სხვა.

ბუნებაში არსებობს პროცესები, რომელთა მიმდინარეობა შეიძლება იყოს სხვადასხვანაირი და შემთხვევითობაზე დამოკიდებული. ამასთანავე, ამა თუ იმ მიმდინარეობის ალბათობა მაინც განისაზღვრება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, ეს არის სიტუაცია, როდესაც სისტემის შესაძლო მდგომარეობისა და გარემოს შესახებ ინფორმაცია არ არის სრულყოფილი. ასეთ შემთხვევით (ალბათურ) პროცესებს სტოქასტური პროცესები ეწოდება. ასეთი სიტუაციის კლასიკური მაგალითია ეკოლოგიური სისტემების მართვა, რომლებიც შემთხვევითი შემფოთების (ზემოქმედების) ზეგავლენის ქვეშ არიან.

საკვანძო სიტყვები: დინამიკური დაპროგრამება; ეკოლოგიური სისტემები; სტოქასტური პროცესი.

შესავალი

ეკოლოგიური სისტემის მდგრადობის უზრუნველსაყოფად აუცილებელია მისი სწორად შემუშავებული მართვა. ეკოლოგიური სისტემების მართვა გულისხმობს ოპტიმალური მართვის ალგორითმის შემუშავებას, რომელიც ითვალისწინებს სისტემაზე მოქმედ შემთხვევით ფაქტორებს, ასევე დაკვირვების შეცდომებს. იმის გათვალისწინებით, რომ

განსახილველ პრობლემაში, შემფოთების (სისტემაზე ზემოქმედება) და დაკვირვების შეცდომების გამომწვევი პროცესები შემთხვევით მოვლენებად ითვლება, შეიძლება ტერმინ „სტოქასტური მართვის პრობლემის“ გამოყენება.

ზოგადად მიღებულია, რომ ნებისმიერი „სწორად“ დასმული ოპტიმიზაციის პრობლემა სტოქასტურია. ზემოქმედების შემთხვევითი ფაქტორები, რომლებიც შეიძლება იყოს მათი ბუნებიდან გამომდინარე ან ჩვენთვის უცნობი მიზეზების გამო, პრაქტიკულად არის ყველა ამოცანაში.

სტოქასტური ოპტიმალური მართვის თეორიის ძირითადი მიზანია უპასუხოს კითხვას: რომელი მართვა ავირჩიოთ (სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, რა გადაწყვეტილება მივიღოთ) ისე, რომ საბოლოო ჯამში, პროცესისა და მართვის გარკვეული ფუნქციონალური მინიმუმამდე იყოს დაყვანილი.

ასეთი პრობლემების ანალიზისათვის და გადასაჭრელად გამოიყენება დინამიკური დაპროგრამება. დინამიკური დაპროგრამება არის მათემატიკური პროგრამირების დარგი, რომელიც მოიცავს ოპტიმალური გადაწყვეტილებების პოვნის ტექნიკას და დაფუძნებულია თითოეული გადაწყვეტილების შედეგების გამოთვლაზე და შემდგომი გადაწყვეტილებებისთვის ოპტიმალური სტრატეგიის შემუშავებაზე. ამ პრინციპზე აგებულ გადაწყვეტილების მიღების პროცესებს მრავალსაფეხურიანი პროცესები ეწოდება. მათემატიკურად, ოპტიმიზაციის ამოცანა აგებულია თანამიმდევრულად დაკავშირებული ურთიერთობების გამოყენებით. მაგალითად, ერთი ნაბიჯისთვის მიღებული შედეგები შეჰყავთ შემდეგი ნაბიჯის (ან, პირიქით, წინა ნაბიჯის)

განტოლებაში და ა.შ. ამ გზით, შესაძლებელია ნებისმიერი არჩეული დროისთვის შედეგების მიღება და შემდეგ „გაგრძელება“. დინამიკური დაპროგრამების გამოყენება შესაძლებელია არა მარტო დროის ცვლილებასთან დაკავშირებულ ამოცანებზე, არამედ მრავალსაფეხურიანი პროცესების სტატისტიკური ამოცანების გადასაჭრელადაც.

დინამიკური დაპროგრამების ამოცანების საერთო მახასიათებელი ის არის, რომ ცვლადები განიხილება არა ყველა ერთდროულად, არამედ თანამიმდევრულად, ერთმანეთის მიყოლებით. ამის არსი ისაა, რომ აიგება ისეთი გამოთვლითი სქემა, სადაც ერთი ამოცანის მრავალი ცვლადის ნაცვლად აიგება მრავალი ამოცანა თითოეულში მცირე რაოდენობის (თუნდაც მხოლოდ ერთი) ცვლადით. ეს მნიშვნელოვნად ამცირებს გამოთვლებს, მაგრამ ეს უპირატესობა მიიღწევა მხოლოდ ორი პირობით: როდესაც ოპტიმალურობის კრიტერიუმი არის ადითიური ანუ საერთო ოპტიმალური გადაწყვეტა არის თითოეული ნაბიჯის ოპტიმალური გადაწყვეტილებების ჯამი და როდესაც მომავალი შედეგები დამოუკიდებელია სისტემის წინა მდგომარეობაზე. ეს ყველაფერი გამომდინარეობს ბელმანის ოპტიმალურობის პრინციპიდან, რომელიც საფუძვლად უდევს დინამიკური დაპროგრამების თეორიას.

ოპტიმალურ გადაწყვეტას ახასიათებს ის თვისება, რომ როგორც უნდა იყოს საწყისი მდგომარეობა და გადაწყვეტილება (ან მართვა), შემდგომი გადაწყვეტილებები უნდა წარმოადგენდეს ოპტიმალურ ქცევას, მიღებულს პირველი გადაწყვეტილების შედეგად. ეს პრინციპი ასევე შეიძლება გამოიხატოს ასე: თუ ჩვენ არ გამოვიყენებთ საუკეთესოდ იმას, რაც გვაქვს, ვერ შევძლებთ შემდგომში გამოვი-

ყენოთ საუკეთესოდ ის, რაც შესაძლებელია გვექნეს მომავალში. ამ მეთოდის თავისებურება ის არის, რომ გადაწყვეტა იწყება ბოლოდან (მიზნიდან) და ეტაპობრივად მიმდინარეობს უკუმიმდევრობით დასაწყისისკენ.

ძირითადი ნაწილი

როგორც სტატიის შესავალ ნაწილში აღინიშნა, მართვის პრობლემებს შორის განსაკუთრებით მნიშვნელოვანია იმ ობიექტების მართვა, რომლებიც შემთხვევითი შემფოთების ზეგავლენის ქვეშ იმყოფებიან. ასეთ ობიექტებს სტოქასტური ობიექტები ეწოდება. ესენია, კერძოდ, ეკოლოგიური სისტემები.

ზოგიერთ შემთხვევაში, ასეთი პროცესების მართვის ალგორითმების შესამუშავებლად გამოიყენება მართვადი შემთხვევითი პროცესების თეორიის ზოგადი მეთოდები. ეს სტატია განიხილავს სინთეზს ობიექტის მართვის ალგორითმს, რომლის მათემატიკური მოდელის წარმოდგენა შესაძლებელია სხვაობითი განტოლების სახით:

$$x(n) = A(u_n) + B(u_n)w(n) \quad (1)$$

სადაც $x(n)$ არის სისტემის მიმდინარე მდგომარეობა;

u_n - გადაწყვეტილების მიმღების მიერ არჩეული მიმდინარე მართვა;

$w(n)$ - შემთხვევითი შემფოთება;

A და B - ზოგადად წრფივი ფუნქციები u_n -ის მიმართ.

ამ შემთხვევაში, როდესაც პრობლემის არსი მოითხოვს გადაწყვეტილებების ეტაპობრივად მიღებას, ყველაზე ეფექტური მეთოდი (როგორც მოსალოდნელია) დინამიკური დაპროგრამებაა.

ჩვენი მეთოდის საილუსტრაციოდ განვიხილავთ ეკოლოგიურ სისტემას, რომლისთვისაც შემუშავდება სტოქასტური ოპტიმალური მართვა. უნდა აღინიშნოს, რომ ეკოლოგიური სისტემები კლასიფიცირდება, როგორც დიდი ან რთული სისტემები. ეს სისტემები შედგება მრავალი ნაწილისა და ელემენტისგან, რომლებიც ურთიერთდაკავშირებულია და ასრულებენ მრავალფეროვან ფუნქციებს. ეს კავშირები ძალიან რთული და მრავალფეროვანია, ამიტომ მათ აღსაწერად უპირატესობა ენიჭება ტერმინს „რთული სისტემები“. თუმცა, ამ საკითხთან დაკავშირებით ექსპერტების მოსაზრებები განსხვავებულია: ზოგი „დიდ სისტემებს“ და „რთულ სისტემებს“ იდენტურად მიიჩნევს, ზოგი კი მათ განასხვავებს. მაგალითად, ითვლება, რომ სისტემის ზომა ასახავს მხოლოდ მისი ელემენტების რაოდენობას და მათ შორის კავშირებს, ხოლო სისტემის სირთულე ასევე ასახავს ამ ელემენტებისა და კავშირების კომპლექსურობას.

კვლევისა და ანალიზის დროს, რთული სისტემა იყოფა მარტივი ქვესისტემების სასრულ რაოდენობად მანამ, სანამ არ მივიღებთ სისტემის ელემენტს. სისტემის ელემენტად ვვარაუდობთ ობიექტს, რომლის დაშლაც, მოცემული ამოცანის თანახმად შეუძლებელია.

ეკოლოგიური სისტემების შესწავლის ძირითადი სირთულებები დაკავშირებულია მათ არასტაბილურობასთან და ბუნებრივ გარემოში მიმდინარე პროცესების (რომელთა კონტროლი შეუძლებელია) არაპროგნოზირებადობასთან. ამიტომ, პრობლემის გასამარტივებლად, განსახილველ სისტემას წარმოვადგენთ ცალკეული ბლოკების სახით. ანუ, ჩვენ

ვვარაუდობთ, რომ როგორღაც (არ აქვს მნიშვნელობა როგორ) სისტემა დაყოფილია ერთმანეთთან ურთიერთქმედებად ცალკეულ ბლოკებად. პირველადი სისტემის მდგომარეობა დამოკიდებული იქნება თითოეული ბლოკის მდგომარეობაზე. ბლოკის მართვის მიზანია მათზე უარყოფითი ზემოქმედების მინიმიზაცია, რის შედეგადაც მიიღწევა ეკოლოგიური უსაფრთხოება.

შემოთავაზებული მეთოდი გამოვიყენოთ ერთ კონკრეტულ ბლოკზე. მსგავსი გამოთვლები ძალაში იქნება ყველა სხვა ბლოკისთვის. ამრიგად, ჩვენ განვიხილავთ ერთ კონკრეტულ ბლოკს, რომელიც აღწერილია მოდელით (1). რადგან მოდელი (1) შეიცავს აპრიორულ გაურკვევლობას, მართვის ამოცანა იყოფა ორ ნაწილად მისი $w(n)$ შეფასების (იდენტიფიკაციის) და სტოქასტური ოპტიმალური მართვის ამოცანებად. $w(n)$ შეფასება ხორციელდება მისი შეყვანასა და გამოყვანაზე დაკვირვებით და მიღებული მონაცემების სტატისტიკური დამუშავებით, ანუ ამ მნიშვნელობის შეფასება დინამიკური მახასიათებლების მიხედვით – მათემატიკური მოლოდინით $m(n)$ და დისპერსიით $D(n)$.

$x(n)$ სიდიდე კონტროლირებადი ცვლადია. მისი სასურველი მნიშვნელობა აღინიშნება $x^k(n)$ -ით, ანუ ეს არის მნიშვნელობა, რომელიც ხელს უწყობს ეკოლოგიური სისტემის ეფექტურ ფუნქციონირებას. იმის გათვალისწინებით, რომ $x(n)$ შემთხვევითი ცვლადია, მართვის მიზანი ფორმულირდება ალბათური ტერმინებით, მაგალითად, $x(n)$ -ის სტანდარტული გადახრის მინიმიზაცია სასურველი მნიშვნელობიდან, ანუ ამოცანა დაიყვანება პირობითი მა-

თემატიკური მოლოდინის $\{x(n) - x^*(n)\}^2$ მინიმიზაციაში, იმ პირობით, რომ $n(n)$ და $D(n)$ ცნობილია.

$$I_n = \inf_{\{u_1, \dots, u_n\}} M\{[x(n) - x^*(n)]^2 / m(n), D(n)\}, \quad (2)$$

I_n არის დანაკარგების ფუნქცია n ეტაპზე.

თუ სისტემა მუშაობს $(0, T)$ დროის ინტერვალში, მაშინ (2)-ის გათვალისწინებით, საერთო დანაკარგების ფუნქციას აქვს შემდეგი სახე:

$$I = \inf_{\{u_1, \dots, u_n\}} \left\{ \sum_{n=1}^N M[x_1(n) - x_1^*(n)]^2 / m(n), D(n) \right\}. \quad (3)$$

ამოცანა ვიპოვოთ N ცვლადი, რომელიც მინიმუმამდე დაჰყავს (3).

შევიყვანოთ ბელმანის ფუნქცია

$$I[\bar{\sigma}(k) = \inf_{\{u_1, \dots, u_n\}} M\left\{ \sum_{n=k} I[\bar{\sigma}(n), u(n)] \right\},$$

სადაც

$$I[\bar{\sigma}(n), u(n) = M\{[x(n) - x^*(n)]^2 / \bar{\sigma}(n)\},$$

$$\bar{\sigma}(n) = \begin{pmatrix} m(n) \\ D(n) \end{pmatrix}.$$

დინამიკური დაპროგრამების ალგორითმს აქვს შემდეგი სახე:

$$I[\bar{\sigma}(n) = \inf_{u_n} M\{I[\bar{\sigma}(n), u(n)] + T(u_n) I[\bar{\sigma}(n+1)]\}.$$

შეზღუდული პირობის შემთხვევაში

$$I[\bar{\sigma}(N) = \inf_{u_N} I[\bar{\sigma}(N), u_N],$$

აქ ოპერატორი

$$T(u_N)I[\bar{\sigma}(n+1)] = \int_{-\infty}^{\infty} I[\bar{\sigma}(n+1) P\{\bar{\sigma}(n+1) / \bar{\sigma}(n), u_n\} d\bar{\sigma}(n+1),$$

$I[\bar{\sigma}(N)], I[\bar{\sigma}(N-1)], \dots$ თანამიმდევრულად,

ვიპოვოთ მართვებს

$$u_N = u[\bar{\sigma}(N-1)], u_{N-1} = u[\bar{\sigma}(N-2)], u_1 = u[\bar{\sigma}(0)].$$

გავითვალისწინოთ, რომ ჯერ უნდა ვიპოვოთ მართვის მნიშვნელობები, რომლებიც ამცირებენ ხარისხის კრიტერიუმს ბოლო ნაბიჯისთვის.

შედეგად მიღებული ოპტიმალური ალგორითმი უზრუნველყოფს ეკოლოგიური სისტემის ეფექტურ მართვას.

როგორც არაერთხელ აღინიშნა, პრაქტიკაში საჭირო ინფორმაცია სრულად ან ნაწილობრივ არ არსებობს, რაც სერიოზულ დაბრკოლებებს ქმნის ეკოლოგიური სისტემების შესწავლაში. შემოთავაზებული ალგორითმი გადალახავს საჭირო ინფორმაციის ნაკლებობას არსებული ინფორმაციის სრული და მოქნილი გამოყენებით. უფრო მეტიც, ძალიან შეზღუდული ინფორმაციის პირობებშიც კი ეს მიდგომა მნიშვნელოვნად აუმჯობესებს ეკოლოგიური სისტემის აღწერას.

მასალის პრეზენტაცია საშუალებას მოგვცემს დავინახოთ მათემატიკოსების ადგილი ეკოლოგიური სისტემების ეფექტურ ფუნქციონირებასთან დაკავშირებული პრობლემების გადაჭრაში.

დასკვნა

გარემოს დაცვის პრობლემა ყოველწლიურად სულ უფრო აქტუალური ხდება. ის მკვლევარებისგან მოითხოვს რთული ეკოლოგიური სისტემების შესწავლას. ადამიანის გარემოსთან ურთიერთქმედების პრობლემა, ანუ მთლიანად საზოგადოების სტაბილურობის შენარჩუნების პრობლემა, დაკავშირებულია გარემოსდაცვითი პროცესების მართვისას სწორი გადაწყვეტილებების მიღების აუცილებლობასთან. მათემატიკოსები გადამწყვეტ როლს ასრულებენ ამ პროცესების შესწავლაში.

ეს სტატია ნათელი მაგალითია, თუ როგორ გამოიყენოთ თანამედროვე მათემატიკური მეთოდები პრაქტიკული გარემოსდაცვითი პრობლემების გადასაჭრელად. ეკოლოგიური სისტემების ოპტიმალური მართვისადმი წარმოდგენილი მიდგომა შეიძლება გამოყენებულ იქნეს, როგორც მეთოდოლოგიური საფუძველი შესაბამისი გამოთვლითი ალგორითმების შემუშავებისთვის. ეს მეთოდი განკუთვნილია უმაღლესი მათემატიკის ელემენტების მცოდნე პირებისთვის. სხვა წინასწარი ცოდნა არ არის საჭირო.

ლიტერატურა

1. Abzianidze, D. (1990). *Abstract of dissertation for the degree of Candidate of Technical Sciences*. Kyiv Polytechnic Institute, Kyiv, Ukraine. (In Russian).
2. Abzianidze, D., Managadze, R., & Abzianidze, V. (2016). Application of dynamic programming model for solving practical problems of ecological systems security. *Georgian Oil and Gas*, 31, 79–82. (In Russian).
3. Abzianidze, D., Managadze, R., Poporadze, N., & Tabatadze, G. (2015). *The use of methods of mathematical ecology for solving problems of environmental protection*. Georgian Technical University. (In Georgian).
4. Abzianidze, D., Tabatadze, G., Managadze, R., Abzianidze, V., & Inanashvili, N. (2015). Thinking of mathematicians about the ecology and its problems. *Social Economics: XXI Century's Actual Problems*, 273–275. (In Russian).
5. Bertsekas, D. P., & Shreve, S. E. (1985). *Stochastic optimal control: The discrete-time case*. Academic Press.
6. Gabelaya, A., & Abzianidze, D. (1992). *Methods for finding optimal or nearly optimal strategies for stochastic objects*. Kyiv Polytechnic Institute.
7. Karlovich, I. (2005). *Geoecology*. Academic Project. (In Russian).
8. Lopatnikov, L. I. (1975). *Brief economic and mathematical dictionary*. Nauka. (In Russian).
9. Poporadze, N., Abzianidze, D., & Dvali, M. (2010). About problems of ecological security and optimization management of ecological system. *Transactions of Georgian Technical University*, 2(476), 59–63. (In Russian).
10. V. Abzianidze, V., Abzianidze, D., & Managadze, R. (2018). On efficiency of application of elements of higher mathematics for the solution of practical tasks of ecological systems safety. *Works of Georgian Technical University*, 4(510), 117–125. (In Russian).

UDC 502.7

SCOPUS CODE 2303

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2026-3-177-183>

Problems of Managing Ecological Systems in the Case of Incomplete Information (Discrete-Time Case)

- Vera Abzianidze** Georgian Technical University, Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Geological Monitoring Department, Researcher, Georgia
E-mail: abzianidze.v@gtu.ge
- Zurab Kakulia** Georgian Technical University, Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Geological Monitoring Department, Director of the Institute, Georgia
E-mail: z.kakulia@gtu.ge
- Rusudan Managadze** Georgian Technical University, Faculty of Mining Geology and Mountain development, Professor, Georgia
E-mail: abzianidze.v@gtu.ge
- Dimitri Abzianidze** Georgian Technical University, Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Head of Geological Monitoring Department, Georgia
E-mail: z.kakulia@gtu.ge

Reviewers:

Z. Varazashvili, Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Geological Monitoring Department, Head of Department, Academic Doctor

E-mail: z.varazashvili@gtu.ge

D. Chutkerashvili, Institute of Hydrogeology and Engineering Geology, Geological Monitoring Department, Doctor, Academic Doctor

E-mail: d.chutkerashvili@gtu.ge

Abstract. It is clear that the driving forces behind the flourishing of any branch of mathematics can be, on the one hand, the demands of the natural sciences, engineering, economics, ecology, and various applied fields, as well as the needs of mathematics itself—namely, the desire to solve difficult (complex) new problems. Issues of mathematical programming, optimization, and control have come to the forefront of modern mathematics due to the needs of such applications as economic and environmental management, the regulation of automatic technical devices, the recognition of signals or moving objects, and much more.

These are processes whose course may vary and depend on chance, with the probability of a particular course being defined. In other words, this is a situation where there is a complete or partial lack of information about the possible state of the system and the external environment. Such random (probabilistic) processes are called stochastic processes. A classic example of such a situation is the management of various ecological systems subject to random disturbances.

Keywords: Dynamic programming; Ecological systems; Stochastic process;

განხილვის თარიღი 27.05.2026

შემოსვლის თარიღი 08.06.2026

ხელმოწერის დასაბეჭდად 25.09.2026