

UDC 008

SCOPUS CODE 2604

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2026-3-184-190>

## ელექტროგამტარი სითხის ბრტყელპარალელური დინება მაგნიტოჰიდროდინამიკურ არხში წნევის გრადიენტის დროში ნებისმიერად ცვლილებისას

- ვარდენ ცუცქირიძე** საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი, საქართველო  
E-mail: b.tsutskiridze@mail.ru
- ლევან ჯიქიძე** საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის სამშენებლო ფაკულტეტის პროფესორი, საქართველო  
E-mail: l.jikidze@gtu.ge
- ეკა ელერდაშვილი** საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი, საქართველო  
E-mail: Elerdashvili@yahoo.com
- მარი ცუცქირიძე** კავკასიის უნივერსიტეტის მაგისტრის ხარისხი, საქართველო, გრენობლის უნივერსიტეტის მაგისტრის ხარისხი, საფრანგეთი  
E-mail: Tsutskiridzegrenobleem@gmail.com

### რეცენზენტები:

- ნ. კაკაჩიძე**, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი  
E-mail: n.kachakhidze@gtu.ge
- ზ. თედიაშვილი**, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი  
E-mail: z.tediashvili@gtu.ge

**ანოტაცია.** თეორიულად შესწავლილია გამტარი ბლანტი არაკუმშვადი სითხის არასტაციონარული ბრტყელპარალელური დინება მაგნიტოჰიდროდინამიკურ არხში, როდესაც წნევის გრადიენტის ცვლილება დროის მიხედვით ხდება ნებისმიერად. იგუ-

ლისხმება, რომ რეინოლდსის მაგნიტური რიცხვი გაცილებით ნაკლებია ერთზე. ნაშრომში განხილულია ორი კერძო შემთხვევა: როდესაც სითხის მოძრაობა გამოწვეულია წნევის მუდმივი დაცემით და როდესაც წნევის დაცემა ხდება დროში ექსპონენციალური კანონით (პულსაციურად).

**საკვანძო სიტყვები:** არხი; გამტარი სითხე; გრადიენტი; დინება; დრო; წნევა.

## შესავალი

ბრტყელ მაგნიტოჰიდროდინამიკურ არხებში ბლანტი გამტარი სითხის არასტაციონარული დინების თეორიულ კვლევებს ბევრი ნაშრომი ეძღვნება [1-11]. უცვლელ მოდებული მუდმივი წნევის გრადიენტით გამოწვეული სითხის აჩქარება იდეალურად იზოლირებული ან იდეალურად გამტარი კონტურის პირობებში, შესწავლილია [6, 7, 8] ნაშრომებში. [7] ნაშრომში ამ ამოცანის ამოხსნა განზოგადებულია ნებისმიერად გამტარი კონტურის შემთხვევაში.

სითხის არასტაციონარული დინება ბრტყელ არხში იზოლირებული კედლებით დროში ნებისმიერად ცვალებადი წნევის მოქმედებით შესწავლილია [1, 2, 9, 10, 11] ნაშრომებში, სიჩქარესთან დაკავშირებული წნევის მოქმედებით კი [3, 9, 11] ნაშრომებში.

## ძირითადი ნაწილი

წინამდებარე სტატიაში მოცემულია ბრტყელ არხში გამტარი არაკუმშვადი ბლანტი სითხის არასტაციონარული მოძრაობის ამოცანის ამოხსნა, როდესაც არხის ორი კედელი, რომლებიც გარე  $B_0$  მაგნიტური ველის პერპენდიკულარულია, იდეალური იზოლატორებია, ორი გვერდითი კედელი კი – იდეალურად გამტარი ელექტროდები, რომლებიც ჩართულია გარე დატვირთვის  $R_H$  წინააღობაზე.

სითხის მოძრაობა გამოწვეულია წნევის პულსაციური დაცემით:  $P(t) = p_0(1 - e^{-\gamma t})$ .

განსახილავ შემთხვევაში მაგნიტური ჰიდროდინამიკის განტოლებები შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით:

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - j_y B_0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \quad (2)$$

$$j_y = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad (3)$$

$$j_y = \sigma(E_y + v_z B_0). \quad (4)$$

სითხის  $v_z$  სიჩქარის,  $t$  დროის, მაგნიტური ველის  $B_z$  ინდუქციის, ელექტრული ველის  $E_y$ , დამაბულობის წრფივი ზომის მასშტაბებად მივიღოთ შემდეგი სიდიდეები:  $b$ ,  $U$ ,  $T$ ,  $B_0$ ,  $UB_0$ , ამასთანავე,  $U$  და  $T$  სიდიდეებად ავიღოთ სითხის დინების ზღვრული რეჟიმის საშუალო სიჩქარე და სითხის აჩქარების დრო. შევაფასოთ (1) – (4) საწყის განტოლებებში შემავალი სიდიდეების რიგი. გვაქვს

$$x \sim b; \quad E_y \sim UB_0; \quad B_z \sim R_m B_0; \quad t \sim T.$$

შესაბამისად,

$$\left| \frac{\partial B_z}{\partial t} \right| : \left| \frac{\partial E_y}{\partial x} \right| \sim R_m \frac{b}{UT} = \delta.$$

$R_m \ll 1$  შემთხვევაში, დინებების საკმაოდ ფართო არეალში პრაქტიკულად უზრუნველყოფილია პირობა  $\delta \ll 1$  მაშინ მიღებული სიზუსტით, (2) განტოლებიდან გამომდინარეობს  $E_y = E(t)$  და (1) – (4) სისტემა შეიძლება დაყვანილ იქნეს ერთ შემდეგი სახის განტოლებამდე

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = P(t) + v \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{Mv}{b^2} k \langle V_z \rangle - \frac{M^2 v}{b^2} v_z, \quad (5)$$

სადაც  $P(t) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}$ ;  $\langle V_z \rangle = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} v_z dx$ ;  $M = B_0 b \sqrt{\frac{\sigma}{\eta}}$ ;  $k = \left(1 + \frac{R_b}{R_H}\right)^{-1}$ ;  $R_b$  არის მგდ-გენერატორის შიდა

წინაღობა  $a/\sigma l b$ ;  $k$  – დატვირთვის კოეფიციენტი.  $k=0$  შემთხვევა შეესაბამება მოკლე ჩართვას,  $k=1$  შემთხვევა კი – უქმ სვლას.

საზღვრო პირობებია:

$$v_z|_{x=\pm b/2} = 0. \quad (6)$$

საწყისი პირობებია

$$t=0; v_z(x,0)=0; P(0)=0. \quad (7)$$

$$t>0 \quad v_z = v_z(x,t); P = P(t).$$

დასმული ამოცანის ამოსახსნელად ვიყენებთ ლაპლასის ინტეგრალური გარდაქმნის ფორმულებს. შემოვიღოთ შემდეგი აღნიშვნები:

$$V(x,p) = \int_0^\infty v_z(x,t) e^{-pt} dt; \quad \bar{P}(p) = \int_0^\infty P(t) e^{-pt} dt. \quad (8)$$

მაშინ (5) განტოლება ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$V_{xx}'' - \frac{1}{v} \left( p + \frac{M^2 v}{b^2} \right) V = -\frac{1}{v} \left[ \bar{P}(p) + \frac{M^2 v}{b^2} k V_0(p) \right]. \quad (9)$$

აღვნიშნოთ

$$\lambda = \frac{M^2 v}{b^2}; \quad V_0(p) = \int_0^\infty \langle V_z \rangle e^{-pt} dt;$$

$$D(p) = \bar{P}(p) + \lambda k V_0(p).$$

სასაზღვრო პირობებს ექნება შემდეგი სახე:  $V=0$  როცა  $x = \pm b/2$ . (9) განტოლების ამონახსნი ნულოვან სასაზღვრო პირობებში ჩაიწერება შემდეგი სახით [9,10,11]

$$V(x,p) = \frac{D(p)}{v\beta} \left[ 1 - \frac{ch(\sqrt{\beta}x)}{ch(\sqrt{\beta}b/2)} \right], \quad (10)$$

სადაც  $p + \lambda = v\beta$ .

იმისათვის, რომ (10) ამონახსნიდან გამოვრიცხოთ  $V_0(p)$ , ვისარგებლოთ შემდეგი პირობით:

$$V_0(p) = \langle V(x, p) \rangle = \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} V(x, p) dx. \quad (11)$$

შედეგად, საბოლოოდ მივიღებთ:

$$V(x, p) = \frac{\bar{P}(p) b \sqrt{\beta} [ch(\sqrt{\beta} b/2) - ch(\sqrt{\beta} x)]}{v \beta b \sqrt{\beta} ch(\sqrt{\beta} b/2) - \lambda k [b \sqrt{\beta} ch(\sqrt{\beta} b/2) - 2sh(\sqrt{\beta} b/2)]}. \quad (12)$$

რიმან-მელინის თეორემის თანახმად გვქვია:

$$v_z(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{\bar{P}(p) b \sqrt{\beta} [ch(\sqrt{\beta} b/2) - ch(\sqrt{\beta} x)] e^{pt} dp}{v \beta b \sqrt{\beta} ch(\sqrt{\beta} b/2) - \lambda k [b \sqrt{\beta} ch(\sqrt{\beta} b/2) - 2sh(\sqrt{\beta} b/2)]}. \quad (13)$$

(13) ინტეგრალი ნახვევის ტიპის ინტეგრალის საშუალებით შეიძლება წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$v_z(x, t) = \int_0^t \left[ P(t-\tau) \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{b \sqrt{\beta} [ch(\sqrt{\beta} b/2) - ch(\sqrt{\beta} x)] e^{p\tau} dp}{v \beta b \sqrt{\beta} ch(\sqrt{\beta} b/2) - \lambda k [b \sqrt{\beta} ch(\sqrt{\beta} b/2) - 2sh(\sqrt{\beta} b/2)]} \right] d\tau$$

შიგა ინტეგრალი გამოითვლება გამორიცხვის თეორემის გამოყენებით იმ წერტილებში, რომლებიც ტრანსცენდენტული განტოლების ფესვებია:

$$\beta_n = \frac{M^2 k}{b^2} \left[ 1 - \frac{th \sqrt{\beta_n} b/2}{\sqrt{\beta_n} b/2} \right], \quad (15)$$

$$\text{ამასთანავე, } \beta_n = \frac{P_n + \lambda}{v}.$$

შედეგად, დროში წნევის ნებისმიერი გრადიენტის შემთხვევაში, ამოხსნა იღებს შემდეგ საბოლოო სახეს:

$$v_z(x, t) = 2 \int_0^t P(t-\tau) e^{-\lambda \tau} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ch \sqrt{\beta_n} b/2 - ch \sqrt{\beta_n} x) e^{\beta_n v \tau}}{ch \sqrt{\beta_n} b/2 \left( 3 - \frac{M^2 k}{4} \left( \frac{\beta_n b^2}{M^2 k} - 1 \right)^2 \right)}. \quad (16)$$

განვიხილოთ დროში წნევის ვარდნის ექსპონენციალური ცვლილების შემთხვევა (სითხის პულსაციური დინება):

$$P(t) = p_0 (1 - e^{-\gamma t}), \quad (17)$$

სადაც  $\gamma$  ნამდვილი დადებითი რიცხვია.

(16)-ში ინტეგრირების შესრულებით და ზღვრულ სტაციონარულ რეჟიმში შემავალი მწკრივის შეჯამებით ჰიპერბოლური კოსინუსების მიხედვით, მივიღებთ ამონახსნს შემდეგი სახით:

$$v_z(x, t) = \frac{p_0 \left( 1 - \frac{chMx/b}{chM/b} \right)}{\lambda \left[ (1-k) + \frac{2kthM/2}{M} \right]} - 2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ch\sqrt{\beta_n} b/2 - ch\sqrt{\beta_n} x) e^{-\alpha_n^2 t}}{ch\sqrt{\beta_n} b/2 \left( 3 - \frac{M^2 k}{4} \left( \frac{\beta_n b^2}{M^2 k} - 1 \right)^2 \right)} \left( \frac{1}{\alpha_n^2} + \frac{1 - e^{(\alpha_n^2 - \gamma)t}}{\gamma - \alpha_n^2} \right),$$

სადაც  $\alpha_n^2 = \lambda - \beta_n \gamma$ .

არხის განივკვეთის ფართობზე  $v_z(x, t)$ -ის ინტეგრირებით, მივიღებთ ნაკადის საშუალო სიჩქარის გამოსახულებას:

$$\langle V_z \rangle = \frac{p_0 \left( 1 - \frac{2thM/2}{M} \right)}{\lambda \left[ (1-k) + \frac{2kthM/2}{M} \right]} - 2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{th(\sqrt{\beta_n} b/2)}{\sqrt{\beta_n} b/2} e^{-\alpha_n^2 t}}{3 - \frac{M^2 k}{4} \left( \frac{\beta_n b^2}{M^2 k} - 1 \right)^2} \left( \frac{1}{\alpha_n^2} + \frac{1 - e^{(\alpha_n^2 - \gamma)t}}{\gamma - \alpha_n^2} \right). \quad (19)$$

მიღებული ამონახსნის ანალიზი გვიჩვენებს, რომ  $\gamma$ -ს მცირე მნიშვნელობების დროს საშუალო სიჩქარის ცვლილება დროში პრაქტიკულად იმეორებს წნევის ცვლილებას. თუმცა, წნევის ცვლილების დროის შემცირებასთან ერთად ( $\gamma \rightarrow \infty$ ), ნაკადის სიჩქარე იგვიანებს ცვლილებაში და მიისწრაფვის კანონისკენ, რომელიც შეესაბამება წნევის პულსაციურ ცვლილებას. წნევის გრადიენტის მუდმივი დაცემის შემთხვევაში ამოხსნა შეიძლება მივიღოთ (18)-იდან, როცა  $\lambda \rightarrow \infty$ . შედეგად მივიღებთ:

$$v_z(x, t) = \frac{p_0 \left( 1 - \frac{chMx/b}{chM/b} \right)}{\lambda \left[ (1-k) + \frac{2kthM/2}{M} \right]} - 2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ch\sqrt{\beta_n} b/2 - ch\sqrt{\beta_n} x) e^{-\alpha_n^2 t}}{ch\sqrt{\beta_n} b/2 \left( 3 - \frac{M^2 k}{4} \left( \frac{\beta_n b^2}{M^2 k} - 1 \right)^2 \right) \alpha_n^2}. \quad (20)$$

საშუალო სიჩქარის ცვლილება მოიცემა შემდეგი დამოკიდებულებით:

$$\langle V_z \rangle = \frac{p_0 \left( 1 - \frac{2thM/2}{M} \right)}{\lambda \left[ (1-k) + \frac{2kthM/2}{M} \right]} - 2p_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \frac{th(\sqrt{\beta_n} b/2)}{\sqrt{\beta_n} b/2} e^{-\alpha_n^2 t}}{\left[ 3 - \frac{M^2 k}{4} \left( \frac{\beta_n b^2}{M^2 k} - 1 \right)^2 \right] \alpha_n^2}. \quad (21)$$

## დასკვნა

ამრიგად, განიხილება გამტარი სითხის ბრტყელი მაგნიტოჰიდროდინამიკური ნაკადები დროში

ნებისმიერად ცვალებადი წნევის გრადიენტის არსებობისას რეინოლდსის მაგნიტური რიცხვის შემთხვევაში, რომელიც ერთზე ბევრად ნაკლებია.

## ლიტერატურა

1. Loitsianski, L. G. (1987). *Fluid and gas mechanics*. Moscow: Nauka.
2. Vatagin, A. B., Lyubimov, G. A., & Regirer, S. A. (1970). *Magnetohydrodynamic flows in channels*. Moscow: Nauka.
3. Landau, L. D., & Lifshitz, E. M. (1982). *Electrodynamics of continuous media*. Moscow: Gittl.
4. Sharikadze, D. V. (1966). On a problem of magnetic hydrodynamics. *Soobshcheniya Akademii Nauk Gruzinskoy SSR*, 43(2), 295–300.
5. Tsutskiridze, V. N. (2001). Pulsating flow of a viscous fluid in a circular cylindrical pipe of variable cross-section. In *Proceedings of the International Symposium Dedicated to the Problems of Thin-Walled Spatial Systems* (pp. 8–11). Tbilisi: Georgian Technical University.
6. Deshikachar, K. S., & Ramachandra, R. A. (1987). Magnetohydrodynamic unsteady flow in a tube of variable cross section in an axial magnetic field. *Physics of Fluids*, 30(1), 278–279.
7. Ramos, J. T., & Winowich, N. S. (1986). Magnetohydrodynamic channel flow study. *Physics of Fluids*, 29(4), 992–997.
8. Ihara, S., Tajima, K., & Matsushima, A. (1964). The flow of conducting fluids in circular pipes under uniform transverse magnetic fields. In *Proceedings of the 42nd National Conference of the Japan Society of Mechanical Engineers* (No. 119, pp. 117–120).
9. Tsutskiridze, V., & Jikidze, L. (2015). The conducting liquid flow between porous wells with heat transfer. *Proceedings of A. Razmadze Mathematical Institute*, 167, 73–89.
10. Jikidze, L., & Tsutskiridze, V. (2008). The steady MHD-flow of a conductive fluid in the neighbourhood of an infinite porous plate at simultaneous rotation of a plate and fluid with strong magnetic field. *Reports of Enlarged Sessions of the I. Vekua Institute of Applied Mathematics*, 22, 56–60.
11. Sharikadze, J. V., Tsutskiridze, V. N., & Jikidze, L. A. (2013). The unsteady flow of incompressible fluid in constant cross-section pipes in an external uniform magnetic field. *Problems of Mechanics*, 1(50), 77–83. ISSN

UDC 008

SCOPUS CODE 2604

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2026-3-184-190>

## Unsteady Plane-Parallel Flow of a Conducting Fluid in a Magnetohydrodynamic Channel with an Arbitrary Time-Varying Pressure Gradient

- Varden Tsutskiridze** Georgian Technical University, Faculty of Informatics and Control Systems, Associate Professor, Georgia  
E-mail: b.tsutskiridze@mail.ru
- Levan Jikidze** Georgian Technical University, Faculty of Construction, Professor, Georgia  
E-mail: l.jikidze@gtu.ge
- Eka Elerdashvili** Georgian Technical University, Faculty of Informatics and Control Systems, Associate Professor  
E-mail: Elerdashvili@yahoo.com
- Mari Tsutskiridze** Caucasus University, Master Degree, Georgia  
Grenoble University, Master Degree, France  
E-mail: Tsutskiridzegrenobleem@gmail.com

### Reviewers:

**N. Kachakhidze**, Georgian Technical University, Faculty of Informatics and Control Systems, Professor  
E-mail: n.kachakhidze@gtu.ge

**Z. Tediashvili**, Georgian Technical University, Faculty of Informatics and Control Systems, Associate Professor  
E-mail: z.tediashvili@gtu.ge

**Abstract.** A theoretical study of the unsteady flow of a viscous incompressible conducting fluid in a magnetohydrodynamic channel under the action of an arbitrarily time-varying pressure gradient at a magnetic Reynolds number much less than unity has been carried out. The article considers two special cases of unsteady fluid flow with a suddenly applied constant pressure gradient and a change in this gradient over time according to an exponential law.

**Keywords:** Channel; Conductivity; Flow; Gradient; Liquid; Pressure; Time.

---

განხილვის თარიღი 26.03.2026

შემოსვლის თარიღი 15.04.2026

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25.09.2026