

UDC 517

SCOPUS CODE 2603

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2024-4-188-199>

ლექანდრის მწკრივის აბელის მეთოდით შეჯამებადობის შესახებ

ანი ელიაშვილი მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: eliashvilian@fmail.com

ნოდარ მაჭარაშვილი მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: nodar54@yahoo.com

რეცენზენტები:

ზ. წიკლაური, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: zviadsiklauri@yahoo.com

ა. კირთაძე, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: kirtadze2@yahoo.com

ანოტაცია. მწკრივების შეჯამებადობის წრფივ მეთოდებს შორის ერთ-ერთი ყველაზე ცნობილი არის აბელის მეთოდი. ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივებისათვის შეჯამებადობის აბელის მეთოდი პირველად გამოიყენა პუასონმა, ამიტომ ამ მეთოდს ზოგჯერ აბელ-პუასონის მეთოდსაც უწოდებენ. შემდგომში ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის გაწარმოებით მიღებული მწკრივის შეჯამებადობა განიხილა ფატუმ. ლექანდრის მწკრივის აბელის მეთოდით შეჯამებადობა შეისწავლა ჰობსონმა. კერძოდ მან აჩვენა, რომ თუ ფუნქცია უწყვეტია წერტილში მისი ლექანდრის მწკრივი შეჯამებადია აბელის მეთოდით ფუნქციის მნიშვნელო-

ბისაკენ ამ წერტილში, ხოლო წერტილში პირველი გვარის წყვეტის შემთხვევაში – ამ წერტილში ფუნქციის მარჯვენა და მარცხენა ზღვრების საშუალო არითმეტიკულისკენ. ჰობსონმა შეისწავლა აგრეთვე ლექანდრის მწკრივის აბელის მეთოდით თანაბრად შეჯამებადობის პირობები.

მოცემულ ნაშრომში განხილულია ლექანდრის მწკრივის აბელის მეთოდით თითქმის ყველგან შეჯამებადობის საკითხი. კერძოდ, განსაზღვრულია ე.წ. D წერტილები და ნაჩვენებია, რომ ყოველ D წერტილში ლექანდრის მწკრივი აბელის მეთოდით შეჯამებადია.

ნაშრომში აგრეთვე შესწავლილია ლექანდრის გაწარმოებული მწკრივის აბელის მეთოდით შეჯამებადობის საკითხი.

მებადობა. დადგენილია გაწარმოებული მწკრივის აბელის საშუალოს სახე, მისი ზოგიერთი თვისება და დამტკიცებულია აბელის საშუალოს წარმოებულის ზღვრის არსებობის საკმარისი პირობა.

საკვანძო სიტყვები: აბელის მეთოდი; კრებადობა; ლეჟანდრის მწკრივი; პუასონი; ფურიეს მწკრივი; შეჯამებადობა.

შესავალი

ფურიეს მწკრივი ლეჟანდრის ფუნქციათა სისტემის მიმართ ანუ ლეჟანდრის მწკრივი და მისი კრებადობის საკითხი პირველად განიხილა პუასონმა. მის შედეგებში უზუსტობები შეამჩნია დირიხლემ. თვითონ დირიხლე იხილავდა ისეთი ფუნქციების ლეჟანდრის მწკრივებს, რომლებსაც ჰქონდა ექსტრემუმების სასრული რაოდენობა. ამ მწკრივების კრებადობის შესახებ შემდგომი შედეგები ეკუთვნის დინის. ჰობსონის ნაშრომებში ლეჟანდრის მწკრივების შესახებ პირველად გამოჩნდა დამატებითი პირობები ფუნქციაზე შუალედის ბოლო წერტილებზე. შუალედის შიგა წერტილებზე ლეჟანდრის მწკრივის კრებადობის საკითხებს, როცა ფუნქციას მთელ შუალედზე აქვს სასრული ვარიაცია, იხილავდა ბურკხარდი.

ლეჟანდრის მწკრივის აბელის მეთოდით წერტილში შეჯამებადობისა და შუალედზე თანაბრად შეჯამებადობის საკითხები შესწავლილი ჰქონდა გობსონს.

ჩვენი მიზანია შევისწავლოთ ლეჟანდრის მწკრივის თითქმის ყველგან შეჯამებადობა. აგრეთვე გან-

ვიხილოთ ლეჟანდრის მწკრივის აბელის საშუალოს წარმოებული და დავადგინოთ მისი სასაზღვრო თვისებები.

ძირითადი ნაწილი

განვიხილოთ $[0; \pi]$ შუალედში ინტეგრებადი $f(\vartheta)$ ფუნქციის ლეჟანდრის მწკრივი

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \omega), \quad (1)$$

სადაც

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_0^\pi f(\cos \vartheta) P_n(\cos \vartheta) \sin \vartheta d\vartheta,$$

ხოლო $P_n(x)$ ლეჟანდრის მრავალწევრებია.

შევადგინოთ (1) მწკრივის აბელის საშუალო

$$S_f(h, \omega) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \omega) h^n, \quad 0 < h < 1. \quad (2)$$

ვთქვათ S არის ერთეულრადიუსიანი სფეროს ზედაპირი, dS არის სფეროს ზედაპირის ელემენტი, γ არის კუთხე S ზედაპირზე მდებარე $P(\omega, 0)$ და $Q(\vartheta, \varphi)$ წერტილების რადიუსვექტორებს შორის. როგორც ცნობილია [1]

$$\cos \gamma = \cos \omega \cos \vartheta + \sin \omega \sin \vartheta \cos \varphi, \quad (3)$$

ამიტომ (1) მწკრივის (2) საშუალო ასე შეგვიძლია ჩავწეროთ [1]

$$\begin{aligned} S(h; \omega) &= S_f(h; \omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_S f(x) P(h, \gamma) dS = \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\cos \vartheta) P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (4)$$

სადაც

$$P(h, \gamma) = (1 - h^2)(1 - 2h \cos \gamma + h^2)^{-\frac{3}{2}}. \quad (5)$$

ვინაიდან

$$1 - 2h \cos \gamma + h^2 = (1 - h)^2 + 4h \sin^2 \frac{\gamma}{2}, \quad (6)$$

ამიტომ $P(r, \gamma)$ არის დადებითი და γ -ს მიმართ კლებადი ფუნქცია.

$\vartheta_0 \in [0; \pi]$ წერტილს უწოდებენ f ფუნქციის D წერტილს, თუ

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} \int_0^h [f(\vartheta_0 + t) - f(\vartheta_0)] \sin t dt = 0,$$

ანუ

$$\int_0^h [f(\vartheta_0 + t) - f(\vartheta_0)] \sin t dt = \bar{o}(h^2).$$

მტკიცდება, რომ თუ $f \in L$, მაშინ $[0; \pi]$ სეგმენტის თითქმის ყველა წერტილი f ფუნქციის D წერტილია.

მართებულია შემდეგი ლემა [2].

ლემა. ვთქვათ $[0, \delta]$ შუალედში $f(t) \sin t$ ინტეგრებადია და

$$\varepsilon = \sup_{0 < h \leq \delta} \left\{ \frac{1}{h^2} \int_0^h f(t) \sin t dt \right\},$$

მაშინ ნებისმიერი არაუარყოფითი არაზრდადი $g(t)$ ფუნქციისათვის გვაქვს

$$\left| \int_0^\delta g(t) f(t) \sin t dt \right| \leq \varepsilon \int_0^\delta g(t) \sin t dt.$$

დავამტკიცოთ თეორემა ლეჟანდრის მწკრივის აბელის საშუალოს თითქმის ყველგან კრებადობის შესახებ.

თეორემა 1. ვთქვათ $f(\vartheta)$ ინტეგრებადია $[0; \pi]$ სეგმენტზე. თუ ϑ_0 არის D წერტილი, მაშინ

$$\lim_{h \rightarrow 1} S_f(h, \vartheta_0) = f(\vartheta_0). \quad (7)$$

დამტკიცება. ვინაიდან [2]

$$\iint_S P(r, \gamma) ds = 4\pi,$$

(4) ტოლობის ძალით მივიღებთ

$$S_f(h; \vartheta_0) - f(\vartheta_0) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} [f(\vartheta) - f(\vartheta_0)] P(h; \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (8)$$

რადგან ϑ_0 არის f ფუნქციის D წერტილი, ამიტომ $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს δ , $0 < \delta < \delta_0$ ისეთი, რომ როცა $0 < t \leq \delta$, გვაქვს

$$\int_0^t [f(\vartheta_0 + \vartheta) - f(\vartheta_0)] \sin \vartheta dt < \varepsilon \cdot t^2.$$

ვთქვათ

$\Delta = \{(\vartheta, \varphi) : \vartheta_0 - \delta < \vartheta < \vartheta_0 + \delta, 0 < \varphi < 2\pi\}$. ცხადია

$$S_f(h; \vartheta_0) - f(\vartheta_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Delta} + \frac{1}{4\pi} \iint_{S \setminus \Delta} = I_1 + I_2 . \quad (8)$$

(6)-ის ძალით I_2 ასე შეიძლება შეფასდეს:

$$|I_2| < (1 - h^2) \left[(1 - h)^2 + 4h \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]^{-\frac{3}{2}} \iint_{S \setminus \Delta} [f(\vartheta) - f(\vartheta_0)] \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

აქედან გამომდინარე

$$\lim_{h \rightarrow 1} I_2 = 0 . \quad (9)$$

განვიხილოთ I_1 ინტეგრალი. სფეროს ჩრდილოეთი პოლუსი მოვათავსოთ $(\vartheta_0; 0)$ წერტილში. მაშინ I_1 მიიღებს სახეს

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} [f(\gamma) - f(\vartheta_0)] P(r, \gamma) \sin \gamma d\gamma .$$

თუ გამოვიყენებთ ზემოთ მოყვანილ ლემას I_1 შესაკრებისათვის მივიღებთ

$$|I_1| = \varepsilon \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} P(r, \gamma) \sin \gamma d\gamma \leq 4\pi\varepsilon . \quad (10)$$

(8) დამოკიდებულებიდან (9) და (10)-ის ძალით მიიღება (7) ტოლობის მართებულობა.

ახლა შევისწავლოთ $S_f(h; \omega)$ საშუალოს წარმოებულის სასაზღვრო თვისებები. (4) ტოლობიდან გვაქვს

$$\frac{d}{d\omega} S_f(h; \omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} P(h, \gamma) \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi . \quad (11)$$

(3) და (5) ტოლობებიდან მივიღებთ

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cos \gamma = \cos \omega \sin \vartheta \cos \varphi - \sin \omega \cos \varphi ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \cos \gamma = \sin \omega \cos \vartheta \cos \varphi - \cos \omega \cos \vartheta ,$$

$$\frac{\partial P(r, \omega)}{\partial \cos \omega} = 3h(1 - h^2)(1 - 2h \cos \gamma + h^2)^{-\frac{5}{2}} ,$$

ამიტომ

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \cos \gamma + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \cos \gamma = -2 \sin(\omega + \vartheta) \sin^2 \frac{\varphi}{2}$$

და

$$\frac{\partial P(r, \omega)}{\partial \omega} + \frac{\partial P(r, \omega)}{\partial \vartheta} = \frac{6h(h^2 - 1) \sin(\omega + \vartheta) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{(1 - 2h \cos \gamma + h^2)^{5/2}} . \quad (12)$$

თეორემა 2. თუ $f'(\vartheta)$ ინტეგრებადია $(0; \pi)$ შუალედში, მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{dS(h; \omega)}{d\omega} = & \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi f'(\vartheta) P(h; \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta \right] d\varphi + \frac{1}{4\pi} \iint_S f(\vartheta) \cos \vartheta P(h, \omega, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi - \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_S f(\vartheta) A_h(\omega, \vartheta, \varphi) P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \end{aligned} \quad (13)$$

სადაც

$$A_h(\omega, \vartheta, \varphi) = \frac{6h \sin(\omega + \vartheta) \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{1 - 2h \cos \varphi + h^2}.$$

დამტკიცება. (11)-დან (12) ტოლობის გათვალისწინებით გვაქვს

$$\frac{d}{d\omega} S_f(h; \omega) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S f(\vartheta) \left\{ \frac{\partial P(h, \gamma)}{\partial \vartheta} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi - \frac{1}{4\pi} \iint_S f(\vartheta) A_h(\omega, \vartheta, \varphi) P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (14)$$

მაგრამ

$$\begin{aligned} \iint_S f(\vartheta) \left\{ \frac{\partial P(h, \gamma)}{\partial \vartheta} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi f(\vartheta) \sin \vartheta \frac{\partial P(h, \gamma)}{\partial \vartheta} d\vartheta \right] d\varphi = \int_0^{2\pi} [f(\vartheta) \sin \vartheta P(h, \omega, \vartheta, \varphi)]_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi} d\varphi - \\ &- \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi (f(\vartheta) \sin \vartheta)' P(h, \omega, \vartheta, \varphi) d\vartheta \right] d\varphi = - \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi f'(\vartheta) P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta \right] d\varphi - \\ &- \int_0^{2\pi} \left[\int_0^\pi f(\vartheta) \cos \vartheta P(h, \omega, \vartheta, \varphi) d\vartheta \right] d\varphi. \end{aligned} \quad (15)$$

თუ (15)-ს ჩავსვავთ (14)-ში მივიღებთ დასამტკიცებელ (13) ტოლობას.

შედეგი 1. ადგილი აქვს ტოლობას

$$\iint_S A_h(\omega, \vartheta, \varphi) P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \iint_S \cos \vartheta P(h, \omega, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi = - \iint_S \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \quad (16)$$

შედეგი 2. თუ $f(\vartheta)$ აბსოლუტურად უწყვეტია და $f'(\vartheta)$ ინტეგრებადია, მაშინ

$$\begin{aligned} \frac{dS(h, \omega)}{d\omega} = & \frac{1}{4\pi} \iint_S f'(\vartheta) P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \frac{1}{4\pi} \iint_S f(\vartheta) \cos \vartheta P(h, \omega, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi - \\ & - \frac{1}{4\pi} \iint_S f(\vartheta) A_h(\omega, \vartheta, \varphi) P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned} \quad (17)$$

შედეგი 3. $f(\vartheta) = 1$ ფუნქციის

$$S(h, \omega) = \frac{1}{4\pi} \iint_S P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 1$$

აბელის საშუალოსთვის გვაქვს

$$\frac{dS(h, \omega)}{d\omega} = \frac{1}{4\pi} \iint_S \cos \vartheta P(h, \omega, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi - \frac{1}{4\pi} \iint_S A_h(\omega, \vartheta, \varphi) P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = 0. \quad (18)$$

ახლა შევისწავლოთ (13) ტოლობაში მონაწილე ბოლო ორი შესაკრები. თუ დავუშვებთ, რომ

$$R(f; h, \omega) = \iint_S f(\vartheta) \cos \vartheta P(h, \omega, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi - \iint_S f(\vartheta) A_h(\omega, \vartheta, \varphi) P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi, \quad (19)$$

მაშინ (16) ტოლობიდან გვაქვს

$$R(f + c; h, \omega) = R(f; h, \omega), \quad (20)$$

სადაც c მუდმივი რიცხვია.

თეორემა 3. თუ ω_0 წერტილში $f(\omega)$ ფუნქციას აქვს სასრული ზღვარი, მაშინ

$$\lim_{(h, \omega) \rightarrow (1, \omega_0)} \alpha_h(\omega) = \lim_{(h, \omega) \rightarrow (1, \omega_0)} \beta(\omega) = 0,$$

ე.ი.

$$\lim_{(h, \omega) \rightarrow (1, \omega_0)} R(f; h, \omega) = 0,$$

სადაც

$$\alpha_h(\omega) = \iint_S f(\vartheta) \cos \vartheta P(h, \gamma) d\vartheta d\varphi, \quad \beta_r(\omega) = \iint_S f(\vartheta) A_h(\omega, \vartheta, \varphi) P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

დამტკიცება. (20) ტოლობის ძალით შეგვიძლია ვიგულისხოთ, რომ f ფუნქციის ზღვარი ω_0 წერტილში

ნულის ტოლია. ამიტომ $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს $0 < \delta < \frac{1}{2}\omega_0$ ისეთი, რომ $|f(\vartheta)| < \varepsilon$, $\sin \omega > \frac{1}{2} \sin \omega_0$,

$|ctg \vartheta| < 2 |ctg \vartheta_0|$, $|\vartheta - \omega_0| \leq \delta$. $|\omega - \omega_0| \leq \frac{1}{2}\delta$. დავუშვათ $\Delta(t) = [\omega_0 - t, \omega_0 + t; 0 < \varphi \leq 2\pi]$, მაშინ

$$\alpha_h(\omega) = \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0 + \delta} \int_0^{2\pi} f(\vartheta) \cos \vartheta P(h, \gamma) d\vartheta d\varphi + \iint_{S \setminus \Delta\delta} f(\vartheta) \cos \vartheta P(h, \gamma) d\vartheta d\varphi = \alpha_{h,1}(\omega) + \alpha_{h,2}(\omega).$$

ცხადია

$$|\alpha_{h,1}(\omega)| \leq \varepsilon \iint_{\Delta(\delta)} |ctg \vartheta| P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \leq \varepsilon |ctg \omega_0| \iint_S P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \leq 8\pi \varepsilon |ctg \omega_0|.$$

შევავსოთ ახლა $\alpha_{h,2}(\omega)$ შესაკრები. ვინაიდან

$$1 - 2h \cos \gamma + h^2 = (1 - h)^2 + 4h \sin^2 \frac{\gamma}{2},$$

ამიტომ, როცა $(\vartheta, \varphi) \in S \setminus \Delta(\delta)$, გვაქვს

$$P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \leq (1 - h^2) \left[(1 - h)^2 + 4 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]^{-\frac{3}{2}}.$$

უკანასკნელი უტოლობის მეშვეობით, მივიღებთ

$$|\alpha_{h,2}(\omega)| \leq 2\pi(1 - h^2) \times \left[(1 - h)^2 + 4 \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]^{-\frac{3}{2}} \int_0^\pi |f(\vartheta)| d\vartheta.$$

ე.ი.

$$\lim_{(h,\omega) \rightarrow (1,\omega_0)} \alpha_h(\omega) = 0. \quad (21)$$

შევაფასოთ $\beta_h(\omega)$ შესაკრები. გვაქვს

$$\begin{aligned} \beta_h(\omega) &= \iint_{\Delta(\delta)} f(\vartheta) A_h(\omega, \vartheta, \varphi) P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \\ &+ \iint_{S \setminus \Delta(\delta)} f(\vartheta) A_h(\omega, \vartheta, \varphi) P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = -\beta_{h,1}(\omega) + \beta_{h,2}(\omega). \end{aligned}$$

ვინაიდან [3] $1 - 2h \cos \gamma + h^2 > 4h \sin \omega \sin \vartheta \sin^2 \frac{\varphi}{2}$, ამიტომ

$$|A_h(\omega, \vartheta, \varphi)| \leq \frac{6h \sin^2 \frac{\varphi}{2} |\sin \vartheta \cos \omega + \cos \vartheta \sin \omega|}{4h \sin \omega \sin \vartheta \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = \frac{3 |\sin \vartheta \cos \omega + \cos \vartheta \sin \omega|}{\sin \omega \sin \vartheta}.$$

აქედან გამომდინარე $\beta_{h,1}(\omega)$ შესაკრებისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned} |\beta_{h,1}(\omega)| &\leq \varepsilon \iint_{\Delta(\delta)} |A_h| P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \leq \\ &\leq \frac{3}{2} \varepsilon \iint_{\Delta(\delta)} (|\operatorname{ctg} \omega| + |\operatorname{ctg} \vartheta|) P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \leq 3\varepsilon |\operatorname{ctg} \vartheta_0| \iint_S P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \leq 12\pi |\operatorname{ctg} \omega_0| \varepsilon. \end{aligned}$$

ანალოგიურად $\beta_{h,2}(\omega)$ შესაკრებისათვის მივიღებთ

$$\begin{aligned} |\beta_{h,2}(\omega)| &\leq \iint_{S \setminus \Delta(\delta)} |f(\vartheta)| \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sin \omega \sin \vartheta} \cdot P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi \leq \\ &\leq \frac{6}{\sin \omega_0} \int_{S \setminus \Delta(\delta)} |f(\vartheta)| P(h, \gamma) d\vartheta d\varphi \leq \frac{24\pi h(1-h^2)}{\sin \omega_0 \left(4h \sin^2 \frac{\delta}{4}\right)} \int_0^\pi |f(\cos \vartheta)| d\vartheta. \end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე

$$\lim_{(h,\omega) \rightarrow (1,\omega_0)} \beta_r(\omega) = 0. \quad (22)$$

(21) და (22) ტოლობებიდან ვღებულობთ თეორემის მართებულობას.

შედეგი 4. თუ $f(\omega)$ უწყვეტია ω_0 წერტილში, მაშინ

$$\lim_{(h,\omega) \rightarrow (1,\omega_0)} \omega(f; h, \omega) = 0. \quad (23)$$

თეორემა 4. თუ არსებობს $f'(\omega_0)$, $0 < \omega_0 < \pi$, მაშინ

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{dS_f(h; \omega_0)}{d\omega} = f'(\omega_0).$$

დამტკიცება. ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $f(\omega_0) = 0$ და $f'(\omega_0) = 0$.

მართლაც, განვიხილოთ ფუნქცია

$$\Phi(\vartheta) = f(\vartheta) - f(\omega_0) - \sin(\vartheta - \omega_0) f'(\omega_0).$$

ცხადია, რომ $\Phi(\omega_0) = 0$ და $\Phi'(\omega_0) = f'(\omega_0) - \cos(\omega_0 - \omega_0) f'(\omega_0) = 0$.

გვაქვს

$$f(\vartheta) = \Phi(\vartheta) + f(\omega_0) + \sin(\vartheta - \omega_0) f'(\omega_0),$$

$$S_f(h; \omega) = S_\Phi(h; \omega) + f(\omega_0) + f'(\omega_0) \cdot S_{\sin}(h; \omega),$$

$$\frac{dS(f)}{d\omega} = \frac{dS(\Phi)}{d\omega} + f'(\omega_0) \cdot \frac{1}{4\pi} \iint_S \sin(\vartheta - \omega_0) P(h; \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi.$$

(17) ტოლობის თანახმად

$$\begin{aligned} \iint_S \sin(\vartheta - \omega_0) P(h; \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi &= \iint_S \cos(\vartheta - \omega_0) P(h; \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \\ &+ \iint_S \sin(\vartheta - \omega_0) P(h, \omega, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi - \iint_S \sin(\vartheta - \omega_0) A_h P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = \\ &= \iint_S \cos(\vartheta - \omega_0) P(h, \omega, \vartheta, \varphi) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + R(\sin, h, \omega) \rightarrow 4\pi \cos(\omega_0 - \omega_0) + 0 = 4\pi. \end{aligned}$$

ამრიგად

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{dS_f(h; \omega)}{d\omega} = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{dS(h, \omega)}{d\omega} + f'(\omega_0).$$

უკანასკნელი ტოლობიდან გამომდინარეობს, რომ თუ $f'(\omega_0) = 0$, მაშინ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{dS_f(h, \omega_0)}{d\omega} = 0.$$

(11) და (12) ტოლობებიდან გვაქვს

$$\begin{aligned} -4\pi \frac{dS_f(h, \omega_0)}{d\omega} &= \iint_S f(\vartheta) \left\{ \frac{\partial P(h, \gamma)}{\partial \omega} \right\} \sin \vartheta d\vartheta d\varphi + \\ &+ \iint_S f(\vartheta) A_h(\omega, \vartheta, \varphi) P(h, \gamma) \sin \vartheta d\vartheta d\varphi = M_h(\omega_0) + G_h(\omega_0). \end{aligned}$$

(22) ტოლობის თანახმად

$$\lim_{h \rightarrow 1} G_h(\omega_0) = 0,$$

ამიტომ თეორემის დასამტკიცებლად საკმარისია ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{h \rightarrow 1} M_h(\omega_0) = 0. \quad (24)$$

პირობით $f'(\omega_0) = 0$ და $f(\omega_0) = 0$, ამიტომ $\varepsilon > 0$ რიცხვისათვის არსებობს δ , $0 < \delta < \frac{1}{2}\omega_0$,

$0 < \delta < \frac{1}{2}(\pi - \omega_0)$ ისეთი, რომ როცა $|\vartheta - \omega_0| \leq \delta$ გვაქვს

$$|f(\vartheta)| < \varepsilon \mid \vartheta - \omega_0 \mid$$

ე.ი. $f(\vartheta) \rightarrow 0$, როცა $\vartheta \rightarrow \omega_0$. თუ $\Delta(\delta) = \{(\vartheta, \varphi), \omega_0 - \delta < \vartheta < \omega_0 + \delta, 0 < \varphi \leq 2\pi\}$, გვაქვს

$$M_h(\omega_0) = \iint_{\Delta(\delta)} + \iint_{S \setminus \Delta(\delta)} = M_h^1(\omega_0) + M_h^2(\omega_0).$$

ვინაიდან

$$\frac{\partial P(h, \gamma)}{\partial \vartheta} = \frac{3h(1-h^2)}{(1-2h \cos \gamma + h^2)} \left[\sin(\omega_0 - \vartheta) - 2 \sin \omega_0 \cos \vartheta \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right],$$

ამიტომ

$$|M_h^2(\omega_0)| \leq 9(1-h^2) \left[(1-h)^2 + 4h \sin^2 \frac{\delta}{2} \right]^{\frac{5}{2}} \iint_S |f(\vartheta)| d\vartheta d\varphi.$$

აქედან გვაქვს, რომ

$$\lim_{h \rightarrow 1} M_h^2(\omega_0) = 0. \quad (25)$$

$M_h^1(\omega_0)$ შესაკრებისათვის გვაქვს

$$|M_h^1(\omega_0)| \leq \varepsilon \iint_{\Delta(\delta)} \left| (\vartheta - \omega_0) \frac{\partial}{\partial \vartheta} P(h, \omega_0, \vartheta, \varphi) \right| d\vartheta d\varphi. \quad (26)$$

უკანასკნელი ინტეგრალი შევაფასოთ ისევე, როგორც იგივენაირი ინტეგრალი შეფასებულია [3]-ში კერძოდ, დავუშვათ

$$K_h(\omega_0) = \iint_{\Delta(\delta)} \left| (\vartheta - \omega_0) \frac{\partial}{\partial \vartheta} P(h, \omega_0, \vartheta, \varphi) \right| d\vartheta d\varphi$$

$$\chi(\omega_0, \vartheta, \varphi) = \sin(\omega_0 - \vartheta) - 2 \sin \omega_0 \cos \vartheta \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

ცხადია, რომ

$$\chi\left(\frac{\pi}{2}, \vartheta, \varphi\right) = \cos \vartheta \cos \varphi,$$

ამიტომ

$$\chi\left(\frac{\pi}{2}, \vartheta, \varphi\right) \geq 0, \text{ როცა } 0 \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}, |\varphi| \leq \delta,$$

$$\chi\left(\frac{\pi}{2}, \vartheta, \varphi\right) \leq 0, \text{ როცა } \frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \pi, |\varphi| \leq \delta.$$

ვინაიდან

$$\chi(\omega_0, \omega_0, \varphi) = -\sin 2\omega_0 \sin^2 \frac{\varphi}{2},$$

ამიტომ δ ისე შეგვიძლია ავარჩიოთ, რომ

$$\chi(\omega_0, \vartheta, \varphi) \leq 0, \quad 0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}, \quad |\vartheta - \omega_0| \leq \delta$$

$$\chi(\omega_0, \vartheta, \varphi) \geq 0, \quad \frac{\pi}{2} < \omega_0 < \pi, \quad |\vartheta - \omega_0| \leq \delta.$$

ამის შემდეგ ცალ-ცალკე განვიხილოთ შემთხვევები: 1) $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{2} < \omega_0 < \pi$ და 3) $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$.

1) ვთქვათ $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$. ამ შემთხვევაში გვაქვს

$$K_h(\omega_0) = \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0} (\vartheta - \omega_0) \frac{\partial}{\partial \vartheta} P(h, \omega_0, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi + \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \delta} (\omega_0 - \vartheta) \frac{\partial}{\partial \vartheta} P(h, \omega_0, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi.$$

ნაწილობითი ინტეგრების შემდეგ მივიღებთ:

$$K_h(\omega_0) = \delta \int_{-\delta}^{\delta} [P(h, \omega_0, \omega_0 - \delta, \varphi) - P(h, \omega_0, \omega_0 + \delta, \varphi)] d\varphi - \\ - \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\omega_0 - \delta}^{\omega_0} P(h, \omega_0, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi + \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\omega_0}^{\omega_0 + \delta} P(h, \omega_0, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi.$$

(6) ტოლობის ძალით $P(h, \omega_0, \omega_0 - \delta, \varphi)$ და $P(h, \omega_0, \omega_0 + \delta, \varphi)$ ზემოდან შეფასდება სიდიდით

$$(1 - h^2) \left(4h \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)^{-\frac{3}{2}}, \text{ ამიტომ}$$

$$K_h(\omega_0) \leq 4\delta^2 (1 - h^2) \left(4h \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} + \iint_{\Delta(\delta)} P(h, \omega_0, \vartheta, \varphi) d\vartheta d\varphi \leq \\ \leq 4\delta^2 (1 - h^2) \left(4h \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{\sin(\omega_0 - \delta)} \iint_{\Delta(\delta)} P(h, \omega_0, \vartheta, \varphi) \sin d\vartheta d\varphi \leq \\ \leq 4\delta^2 (1 - h^2) \left(4h \sin^2 \frac{\delta}{2} \right)^{-\frac{3}{2}} + \frac{4\pi}{\sin(\omega_0 - \delta)}. \quad (27)$$

(27)-ის და (26)-ის ძალით (25) ტოლობა დამტკიცებულია, როცა $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$.

ანალოგიურად შეგვიძლია განვიხილოთ შემთხვევები, როცა $\frac{\pi}{2} < \omega_0 < \pi$ და $\omega_0 = \frac{\pi}{2}$. ამრიგად, (24)

ტოლობა დამტკიცებულია.

დასკვნა

განხილულია ლეჟანდრის მწკრივის აბელის საშუალო. დამტკიცებულია, რომ ინტეგრებადი ფუნქციის ლეჟანდრის მწკრივი თითქმის ყველგან შეჯამებადია აბელის მეთოდით.

ნაშრომში აგრეთვე განხილულია ლეჟანდრის მწკრივის აბელის საშუალოს წარმოებული და შესწავლილია ამ წარმოებულის სასაზღვრო თვისებები.

ბი. კერძოდ, დამტკიცებულია ამ წარმოებულის ზღვრის არსებობის საკმარისი პირობა.

შევნიშნოთ, რომ ლეჟანდრის მწკრივის აბელის საშუალოს წარმოებულის შესახებ ნაშრომში დამტკიცებული თეორემა არის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივებისათვის ფატუს ცნობილი თეორემის ანალოგი.

ლიტერატურა

1. Gobson, E. V., (1987), Spherical and ellipsoidal functions theory.
2. Topuria, S. B., (1987) Fourier-Laplace transforms on sphere, Tbilisi publishing house of University.
3. Dzagnidze, O., P., Private Producers with the frontiers and variation of Poisson integration.

UDC 517

SCOPUS CODE 2603

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2024-4-188-199>

On the summability Legendre series by Abel method

Ani Eliashvili

Department of Mathematics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77, M. Kostava str.

E-mail: eliashvilian@fmail.com

Nodar Macharashvili

Department of Mathematics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77, M. Kostava str.

E-mail: nodar54@yahoo.com

Reviewers:**Z. Tsiklauri**, Professor of the faculty Informatics and Managemen System, GTU

E-mail: zviadsiklauri@yahoo.com

A.Kirtadze, Professor of the faculty Informatics and Managemen System, GTU

E-mail: kirtadze2@yahoo.com

Abstract. Abel's method is one of the well-known among linear methods of summability of series. Abel's method of summability for trigonometric Fourier series was first applied by Poisson, so this method is sometimes called the Abel- Poisson method. Subsequently, Fatou considered the summability of the series obtained by differentiating the Fourier trigonometric series. Gobson studied the summability of the Legendre series by Abel's method. In particular, he showed that if the function is continuous at a point, its Legendre series would be summability by Abel's method to the value of the function at this point, and in the case of discontinuity of the first kind at the point, to the arithmetic mean of the right and left limits of the function. Gobson also studied the conditions of uniform summability of Legendre's series by Abel's method.

In this paper, the issue of almost everywhere summability of Legendre's series by Abel's method is considered. In particular, the so-called points D are determined and it is shown that at each point D the Legendre series is summability by Abel's method.

In the paper summability of Legendre's derived series by Abel's methods is studied. The form of the Abelian mean of the derived series, some of its properties, and the sufficient condition for the existence of the limit of the derivative of the Abel mean have been determined

Keywords: Abel; Convergence; Fourier series; Legendre; Puasson; series; summability.

განხილვის თარიღი 24.06.2024

შემოსვლის თარიღი 28.06.2024

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25.12.2024