

UDC 517

SCOPUS CODE 2603

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2024-4-200-214>

ვიგნერის მრავალწევრების მიმართ ფურიეს მწკრივის კრებადობა

ანი ელიაშვილი მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 75
E-mail: eliashvili@gmail.com

ნოდარ მაჭარაშვილი მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 75
E-mail: nodar54@yahoo.com

რეცენზენტები:

ზ. წიკლაური, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: zviadsiklauri@yahoo.com

ა. კირთაძე, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: kirtadze2@yahoo.com

ანოტაცია. კარგადაა ცნობილი კლასიკური ორ-
თოგონალური მრავალწევრები და მათი თვისებები.
კერძოდ, ლეჟანდრის, იაკობის, ლაგერის, ჰეგენ-
ბაუერის მრავალწევრები და სხვა. ამ ორთოგონა-
ლური მრავალწევრების საშუალებით ადგენენ ფუ-
რიეს მწკრივს და სწავლობენ ფუნქციების წარმოდ-
გენას ამ მწკრივების საშუალებით. აგრეთვე განი-
ხილავენ ამ მწკრივების კრებადობისა და სხვადა-
სხვა მეთოდით შეჯამებადობის საკითხებს.

განზოგადებულ სფერულ ფუნქციათა სისტემის
მიმართ ფურიეს მწკრივის კრებადობისა და შეჯამე-
ბადობის შესწავლისას საჭირო ხდება განვიხილოთ
ფურიეს მწკრივი ვიგნერის მრავალწევრების მი-

მართ. ამიტომ, ბუნებრივია, შევისწავლოთ ამ
მწკრივის კრებადობა და შეჯამებადობა.

მოცემულ ნაშრომში განხილულია ვიგნერის
მრავალწევრების მიმართ ფურიეს მწკრივის კრება-
დობის საკმარისი პირობები. კერძოდ, მოყვანილია
ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივისათვის დი-
ნისა და ჟორდანის პირობების ანალოგიური პირო-
ბები და ვიგნერის მრავალწევრის მიმართ ფურიეს
მწკრივისათვის დამტკიცებულია სხვადასხვა კრე-
ბადობის ნიშნები.

საკვანძო სიტყვები: დინი; ვიგნერი; კრება-
დობა; ლეჟანდრი; ჟორდანი; ფურიეს მწკრივი.

შესავალი

მიუხედავად იმისა, რომ საკმაოდ კარგადაა შესწავლილი ორთოგონალურ მრავალწევრთა მიმართ ფურიეს მწკრივის თვისებები, მაინც საინტერესოა შევისწავლოთ კონკრეტულ ორთოგონალურ მრავალწევრთა მიმართ ფურიეს მწკრივის სპეციფიკური თვისებები და, პირველ რიგში, ცხადია, ამ მწკრივის კრებადობის და თანაბრად კრებადობის პირობები.

მოცემულ ნაშრომში შესწავლილია ვიგნერის მრავალწევრების მიმართ ფურიეს მწკრივის კრებადობა, დამტკიცებული თეორემები წარმოადგენს ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივისათვის დინის, ჟორდანისა და სხვა კრებადობის ნიშნების ანალოგებს ვიგნერის მრავალწევრების მიმართ ფურიეს მწკრივისათვის.

ძირითადი ნაწილი

გელფანდისა და შაპიროს მიერ [1] განხილული იყო განზოგადებული სფერული ფუნქციები და მათთან დაკავშირებული $P_{mn}^\ell(t)$ ფუნქციები, რომლებსაც აქვთ სახე

$$P_{mn}^\ell(t) = \frac{(-1)^{\ell-n} i^{m-n}}{2^\ell (\ell-n)!} \cdot \frac{(\ell-n)!(\ell+m)!}{(\ell+n)!(\ell-m)!} \cdot (1-t)^{-\frac{m-n}{2}} \cdot (1+t)^{-\frac{m+n}{2}} \frac{d^{\ell-n}}{dt^{\ell-n}} \left[(1-t)^{\ell-n} (1+t)^{\ell+n} \right]. \quad (1)$$

იაკობის $P_k^{(\alpha, \beta)}(x)$ მრავალწევრებსა და $P_{mn}^\ell(x)$ ფუნქციებს შორის ასეთი კავშირია [2].

$$P_k^{(\alpha, \beta)}(t) = 2^m \cdot i^{n-m} \cdot \frac{(\ell-n)!(\ell+n)!}{(\ell-m)!(\ell+m)!} \cdot (1-t)^{-\frac{m-n}{2}} \cdot (1+t)^{-\frac{m+n}{2}} \cdot P_{mn}^\ell(t),$$

$$\text{სადაც } \ell = k + \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad n = \frac{\beta - \alpha}{2}.$$

როცა $m = n$, გვაქვს $\alpha = 0$, $\beta = 2m$, $k = \ell - m$, ამიტომ

$$P_{mm}^\ell(t) = \left(\frac{1+t}{2} \right)^m \cdot P_{\ell-m}^{(0, 2m)}(t).$$

თუ $m = n = 0$, მაშინ (1) ტოლობიდან გვაქვს

$$P_{00}^\ell(t) = \frac{(-1)^\ell}{2^\ell \ell!} \cdot \frac{d^\ell}{dt^\ell} \left[(1-t^2)^\ell \right] = P_\ell(t),$$

სადაც $P_\ell(t)$ არის ლეჟანდრის მრავალწევრი.

ცნობილია, რომ [1] $P_{m,m}^\ell(t) = P_{-m,-m}^\ell(t)$, ამიტომ ყოველთვის შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $m \geq 0$.

$P_{mm}^\ell(x)$ მრავალწევრებისათვის გვაქვს [1]

$$\int_{-1}^1 P_{mm}^\ell(x) \cdot P_{mm}^s(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{როცა } \ell \neq s, \\ \frac{2}{2\ell+1}, & \text{როცა } \ell = s. \end{cases}$$

ე.ი. $P_{mm}^\ell(x)$ ფუნქციები ადგენენ ორთოგონალურ სისტემას $[-1; 1]$ სეგმენტზე.

ვთქვათ $[-1; 1]$ სეგმენტზე მოცემულია ვექტორ-ფუნქცია $f(f_x; f_y; f_z)$. დავუშვათ $f_0 = f_x$, $f_1 = \frac{1}{4}f_y$,

$f_{-1} = 4f_z$. განვიხილოთ $[-1; 1]$ სეგმენტზე ინტეგრებადი f_m ($m = 0, \pm 1$) ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $P_{mm}^n(x)$

მრავალწევრების მიმართ:

$$f_m(x) \sim \sum_{n=m}^{\infty} C_n^m P_{mm}^n(x), \quad (2)$$

სადაც

$$C_n^m = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 P_{mm}^n(t) \cdot f_m(t) dt, \quad m = 0, \pm 1.$$

შევადგინოთ (2) მწკრივის კერძო ჯამი

$$S_n(x) = \sum_{k=m}^{n+m} C_k^m \cdot P_{mm}^k(x) = \int_{-1}^1 Q_n(x; t) \cdot f_m(t) dt, \quad (3)$$

სადაც

$$Q_n(x; t) = \sum_{k=m}^{n+m} \frac{2k+1}{2} \cdot P_{mm}^k(x) \cdot P_{mm}^k(t). \quad (4)$$

ცნობილია, რომ [3] თუ $K_n^{(\alpha, \beta)}(x; t)$ არის იაკობის მრავალწევრების მიმართ განხილული ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამის გული, მაშინ

$$K_n^{(\alpha, \beta)}(x; t) = \frac{1}{2^{\alpha+\beta} (2n+\alpha+\beta+2)} \cdot \frac{\Gamma(n+2) \cdot \Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(n+\alpha+1) \cdot \Gamma(\alpha+\beta+1)} \times \\ \times \frac{P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(x) \cdot P_n^{(\alpha, \beta)}(t) - P_n^{(\alpha, \beta)}(x) \cdot P_{n+1}^{(\alpha, \beta)}(t)}{x-t}. \quad (5)$$

თუ (5) ტოლობაში დავუშვებთ, რომ $\alpha = 0$, $\beta = 2m$, $n = \ell - m$, მაშინ (4) ტოლობით მოცემული $Q_n(x; t)$ გულისათვის მივიღებთ

$$Q_n(x; t) = \frac{(n+m+1) \cdot (n+3m+1)}{2^{2m+1} \cdot (n+2m-1)} \cdot \frac{P_{mm}^{n+1}(x) \cdot P_{mm}^n(t) - P_{mm}^n(x) \cdot P_{mm}^{n+1}(t)}{x-t}. \quad (6)$$

ვისარგებლოთ ტოლობით [4]

$$P_{l,1}^k(x) = \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{d}{dx} (P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)) - \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{1}{1+x} (P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)).$$

თუ ამ ტოლობაში გავითვალისწინებთ, რომ [5]

$$\frac{d}{dx} (P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)) = (2k+1) \cdot P_k(x) \quad (7)$$

მივიღებთ

$$P_{1,1}^k(x) = P_k(x) - \frac{1}{1+x} \int_{-1}^x P_k(t) dt. \quad (8)$$

(8) ტოლობიდან გვაქვს $P_{1,1}^0(x) = 0$, ამიტომ (2) მწკრივის კერძო ჯამის გულს, როცა $m=0$ აქვს ასეთი სახე

$$Q_n(x;t) = \sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} P_k(x) \cdot P_k(t), \quad (9)$$

ხოლო როცა $m = \pm 1$ – შემდეგი სახე

$$Q_n(x;t) = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2} \left(P_k(x) - \frac{1}{1+x} \int_{-1}^x P_k(y) dy \right) \cdot \left(P_k(t) - \frac{1}{1+t} \int_{-1}^t P_k(y) dy \right). \quad (10)$$

ვთქვათ $\delta \in (0;1)$ ისეთი რიცხვია, რომ $x \in [-1+\delta; 1-\delta]$. (3) ტოლობით მოცემული $S_n(x)$ კერძო ჯამი წარმოვადგინოთ ასეთი სახით:

$$S_n(x) = S_{n,1}(x) + S_{n,2}(x) + S_{n,3}(x) + S_{n,4}(x) + S_{n,5}(x), \quad (11)$$

სადაც

$$\begin{aligned} S_{n,1}(x) &= \int_{-1}^{-1+n^{-\frac{1}{3}}} Q_n(x;t) \cdot f_m(t) dt, & S_{n,2}(x) &= \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} Q_n(x;t) \cdot f_m(t) dt, \\ S_{n,3}(x) &= \int_{-1+\delta}^{1-\delta} Q_n(x;t) \cdot f_m(t) dt, & S_{n,4}(x) &= \int_{1-\delta}^{1-n^{-\frac{1}{3}}} Q_n(x;t) \cdot f_m(t) dt, \\ S_{n,5}(x) &= \int_{1-n^{-\frac{1}{3}}}^1 Q_n(x;t) \cdot f_m(t) dt. \end{aligned}$$

ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობის ნიშნების გათვალისწინებით შემოვიღოთ ასეთი განსაზღვრებები:

განსაზღვრება 1. ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია $x_0 \in (-1;1)$ წერტილში აკმაყოფილებს D პირობას, თუ არსებობს ინტეგრალი

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0+t) + f(x_0-t) - f(x_0+) - f(x_0-)|}{t} dt.$$

განსაზღვრება 2. ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია $x_0 \in (-1;1)$ წერტილში აკმაყოფილებს L პირობას, თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

განსაზღვრება 3. ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს M პირობას x_0 წერტილში, თუ $f'(x_0)$ შემოსაზღვრულია.

განსაზღვრება 4. ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს G პირობას, თუ x_0 წერტილის რაიმე მიდამოში $f(x)$ ფუნქციას აქვს სასრული ვარიაცია.

განსაზღვრება 5. ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს G^* პირობას, თუ $(-1; 1)$ შუალედში მდებარე რაიმე სეგმენტზე უწყვეტია და აქვს სასრული ვარიაცია.

განსაზღვრება 6. ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს M^* პირობას, თუ $f(x)$ ფუნქციას $(-1; 1)$ შუალედის შიგნით მდებარე რაიმე სეგმენტზე აქვს შემოსაზღვრული წარმოებული.

განსაზღვრება 7. ვიტყვი, რომ $f(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს L^* პირობას, თუ $(-1; 1)$ შუალედის შიგნით მდებარე რაიმე სეგმენტის ყოველი x_1 და x_2 წერტილებისათვის გვაქვს

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2|^\alpha, \quad \alpha > 0.$$

დავამტკიცოთ ორი ლემა.

ლემა 1. თუ არსებობს $\int_{-1}^1 \frac{f_m(t)}{(1-t^2)^{1/4}} dt$, მაშინ თანაბრად x -ის მიმართ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,5}(x) = 0. \quad (12)$$

დამტკიცება. (7)-ის ძალით გვაქვს

$$S_{n,1}(x) = \frac{(n+m+1)(n+3m+1)}{2^{2m+1}(n+2m+1)} \left(P_{mm}^{n+1}(x) \int_{-1}^{-1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{P_{mm}^n(t)}{x-t} \cdot f_m(t) dt - P_{mm}^n(x) \int_{-1}^{-1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{P_{mm}^{n+1}(t)}{x-t} \cdot f_m(t) dt \right).$$

$P_{mm}^n(x)$ მრავალწევრებისათვის მართებული უტოლობა [6]

$$|P_{mm}^n(x)| < \frac{c}{\sqrt{(n-m)\pi}(1-x^2)^{1/4}}, \quad -1 < x < 1,$$

სადაც c რაიმე მუდმივი რიცხვია, ამიტომ

$$\begin{aligned} |S_{n,1}(x)| &< c \cdot n \left(|P_{mm}^{n+1}(x)| \cdot \int_{-1}^{-1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{|P_{mm}^n(t)|}{x-t} \cdot |f_m(t)| dt + |P_{mm}^n(x)| \cdot \int_{-1}^{-1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{|P_{mm}^{n+1}(t)|}{x-t} \cdot |f_m(t)| dt \right) < \\ &< c\sqrt{n} \left(\int_{-1}^{-1+n^{-\frac{1}{3}}} |P_{mm}^{n+1}(t)| \cdot |f_m(t)| dt + \int_{-1}^{-1+n^{-\frac{1}{3}}} |P_{mm}^n(t)| \cdot |f_m(t)| dt \right) < c \int_{-1}^{-1+n^{-\frac{1}{3}}} \frac{|f_m(t)|}{(1-t^2)^{1/4}} dt. \end{aligned}$$

უკანასკნელი უტოლობიდან ლებეგის ინტეგრალის აბსოლუტურად უწყვეტობის გამო გვაქვს

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,1}(x) = 0.$$

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,5}(x) = 0.$$

ე.ი. (12) ტოლობა დამტკიცებულია.

ლემა 2. თუ $f_m(x)$ ინტეგრებადი ფუნქციაა $(-1; 1)$ შუალედზე, მაშინ თანაბრად x -ის მიმართ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,2}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,4}(x) = 0. \quad (13)$$

დამტკიცება. თუ ვისარგებლებთ (9) და (10) ტოლობებით $S_{n,2}(x)$ -თვის მივიღებთ

$$S_{n,2}(x) = S'_{n,2}(x) = \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \left(\sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} P_k(x) \cdot P_k(t) \right) \cdot f_m(t) dt$$

აბ

$$S_{n,2}(x) = S''_{n,2}(x) = \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2} \left(P_k(x) - \frac{1}{1+x} \int_{-1}^x P_k(y) dy \right) \cdot \left(P_k(t) - \frac{1}{1+t} \int_{-1}^t P_k(y) dy \right) \right\} f_m(t) dt.$$

ვინაიდან [5]

$$\sum_{k=0}^n \frac{2k+1}{2} P_k(x) \cdot P_k(t) = \frac{n+1}{2} \cdot \frac{P_n(x) \cdot P_{n+1}(t) - P_{n+1}(x) \cdot P_n(t)}{t-x} \quad (14)$$

ამიტომ $S'_{n,2}(x)$ ასე შეიძლება ჩაიწეროს

$$S'_{n,2}(x) = \frac{n+1}{2} \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \frac{P_n(x) \cdot P_{n+1}(t) - P_n(t) \cdot P_{n+1}(x)}{t-x} \cdot f_m(t) dt.$$

ვაჩვენოთ, რომ თანაბრად x -ის მიმართ $x \in (-1+\delta; 1-\delta)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S'_{n,2}(x) = 0. \quad (15)$$

დავუშვათ

$$F(x, t, n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} \cdot \frac{P_n(x) \cdot P_{n+1}(t) - P_n(t) \cdot P_{n+1}(x)}{t-x}, & \text{როცა } t \in \left(-1+n^{-\frac{1}{3}}; -1+\delta\right) \\ 0, & \text{როცა } t \notin \left(-1+n^{-\frac{1}{3}}; -1+\delta\right) \end{cases}$$

შევამოწმოთ, რომ თანაბრად x -ის მიმართ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 F(x, t, n) \cdot f_m(t) dt = 0. \quad (16)$$

ამისათვის ვისარგებლოთ კრებადობის ზოგადი თეორემით [7] უნდა შევამოწმოთ ორი პირობა: პირველი, რომ $F(x, t, n)$ შემოსაზღვრულია და მეორე, რომ $(-1+\delta; 1-\delta)$ ინტერვალში მოთავსებული ნებისმიერი $(\alpha; \beta)$ შუალედისათვის თანაბრად x -ის მიმართ მართებულია ტოლობა

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} F(x, t, n) dt = 0.$$

მართლაც, ვინაიდან $|P_n(x)| < \frac{c}{n^{1/2}}$ ამიტომ

$$|F(x, t, n)| < \frac{n+1}{2} \cdot \frac{c}{n^{1/2} \cdot (n+1)^{1/2}} < c.$$

ახლა ვაჩვენებთ, რომ სრულდება მეორე პირობაც. $(t-x)^{-1}$ ფუნქციის მონოტონურობის გამო გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_a^\beta F(x, t, n) dt &= \frac{n+1}{2} \left\{ P_n(x) \cdot \int_a^\beta \frac{P_{n+1}(t)}{t-x} dt - P_{n+1}(x) \cdot \int_a^\beta \frac{P_n(t)}{t-x} dt \right\} = \\ &= \frac{n+1}{2} \left\{ \frac{P_n(x)}{\alpha-x} \cdot \int_a^{\xi_1} P_{n+1}(t) dt + \frac{P_n(x)}{\beta-x} \cdot \int_{\xi_1}^\beta P_{n+1}(t) dt - \frac{P_{n+1}(x)}{\alpha-x} \cdot \int_a^{\xi_2} P_n(t) dt - \right. \\ &\quad \left. - \frac{P_{n+1}(x)}{\beta-x} \cdot \int_{\xi_2}^\beta P_n(t) dt \right\}. \end{aligned} \quad (17)$$

(7)-ის ძალით მივიღებთ

$$\int_a^b P_n(t) dt = \frac{1}{2n+1} (P_{n+1}(b) - P_{n-1}(b) - P_{n+1}(a) + P_{n-1}(a)).$$

ამიტომ

$$\int_a^b P_n(t) dt \leq \frac{c}{n}.$$

აქედან ცხადია, რომ (17) ტოლობის მარჯვენა მხარის თითოეული შესაკრები მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \rightarrow \infty$. ამრიგად, ვაჩვენეთ (16) ტოლობის მართებულობა. აქედან გამომდინარეობს, რომ მართებულია (15).

ახლა განვიხილოთ $S''_{n,2}(x)$. ცხადია

$$S''_{n,2}(x) = \sigma_{n,1}(x) + \sigma_{n,2}(x) + \sigma_{n,3}(x) + \sigma_{n,4}(x),$$

სადაც

$$\begin{aligned} \sigma_{n,1}(x) &= \int_{-1+n}^{-1+\delta} \left\{ \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2} P_k(x) \cdot P_k(t) \right\} f_m(t) dt, \\ \sigma_{n,2}(x) &= \int_{-1+n}^{-1+\delta} \left\{ \int_{-1}^t \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2} P_k(x) \cdot P_k(y) dy \right\} \frac{f_m(t)}{1+t} dt, \\ \sigma_{n,3}(x) &= -\frac{1}{1+x} \int_{-1+n}^{-1+\delta} \left\{ \int_{-1}^x \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2} P_k(t) \cdot P_k(y) dy \right\} f_m(t) dt, \\ \sigma_{n,4}(x) &= \frac{1}{1+x} \int_{-1+n}^{-1+\delta} \left\{ \int_{-1}^x \int_{-1}^t \sum_{k=0}^{n+1} \frac{2k+1}{2} P_k(y) \cdot P_k(\tau) d\tau dy \right\} \frac{f_m(t)}{1+t} dt. \end{aligned}$$

(16)-ის ძალით ცხადია, რომ თანაბრად x -ის მიმართ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n,1}(x) = 0$.

(14) ტოლობის გამოყენებით $\sigma_{n,2}(x)$ ასე შეიძლება ჩაიწეროს

$$\sigma_{n,2}(x) = \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \left\{ \frac{n+1}{2(1+t)} \cdot P_{n+2}(x) \cdot \int_{-1}^t \frac{P_{n+1}(y)}{y-x} dy - \frac{n+1}{2(1+t)} \cdot P_{n+1}(x) \cdot \int_{-1}^t \frac{P_{n+2}(y)}{y-x} dy \right\} f_m(t) dt.$$

ცხადია არსებობს ისეთი $\xi \in \left(-1+n^{-\frac{1}{3}}; -1+\delta\right)$, რომ

$$\begin{aligned} \sigma_{n,2}(x) &= \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \frac{n+1}{2(1+t)} \cdot P_{n+2}(x) \cdot \left\{ -\frac{1}{1+x} \int_{-1}^{\xi} P_{n+1}(y) dy + \frac{1}{t-x} \int_{\xi}^1 P_{n+1}(y) dy \right\} f_m(t) dt - \\ &- \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \frac{n+1}{2(1+t)} \cdot P_{n+1}(x) \cdot \left\{ -\frac{1}{1+x} \int_{-1}^{\xi} P_{n+2}(y) dy + \frac{1}{t-x} \int_{\xi}^1 P_{n+2}(y) dy \right\} f_m(t) dt. \end{aligned}$$

თუ ვისარგებლებთ (7) ტოლობით მივიღებთ

$$\begin{aligned} \sigma_{n,2}(x) &= -\frac{n+1}{2(1+x)} \cdot \frac{P_{n+1}(x)}{2n+5} \cdot \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \left\{ \int_{-1}^{\xi} \frac{d}{dy} (P_{n+3}(y) - P_{n+1}(y)) dy \right\} \cdot \frac{f_m(t)}{1+t} dt + \\ &+ \frac{n+1}{2n+5} \cdot P_{n+1}(x) \cdot \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \left\{ \int_{-1}^{\xi} \frac{d}{dy} (P_{n+3}(y) - P_{n+1}(y)) dy \right\} \cdot \frac{f_m(t)}{(t-x)(1+t)} dt + \\ &+ \frac{n+1}{2(2n+3)} \cdot \frac{P_{n+2}(x)}{1+x} \cdot \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \left\{ \int_{-1}^{\xi} \frac{d}{dy} (P_{n+2}(y) - P_n(y)) dy \right\} \cdot \frac{f_m(t)}{1+t} dt - \\ &- \frac{n+1}{2(2n+3)} \cdot P_{n+2}(x) \cdot \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \left\{ \int_{-1}^{\xi} \frac{d}{dy} (P_{n+2}(y) - P_n(y)) dy \right\} \cdot \frac{f_m(t)}{(t-x)(1+t)} dt. \end{aligned}$$

მიღებული შესაკრებებიდან თითოეულში

$$\int_{-1}^{\xi} \frac{d}{dy} (P_{n+3}(y) - P_{n+1}(y)) dy$$

მუდმივი რიცხვია. ამასთან ერთად საშუალო მნიშვნელობის თეორემის ძალით

$$\int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{-1+\delta} \frac{f_m(t)}{1+t} dt = n^{\frac{1}{3}} \int_{-1+n^{-\frac{1}{3}}}^{\eta} f_m(t) dt$$

სადაც $\eta \in \left(-1+n^{-\frac{1}{3}}; -1+\delta\right)$.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $|P_n(x)| < c \cdot n^{-\frac{1}{2}}$, $-1 < x < 1$, $\sigma_{n,2}(x)$ -ის თითოეული შესაკრები ნაკლებია

$$c \cdot n^{-\frac{1}{2}} \cdot n^{\frac{1}{3}} \cdot \int_{-1}^1 |f_m(t)| dt < c \cdot n^{-\frac{1}{6}} \text{ სიდიდეზე.}$$

აქედან გვაქვს, რომ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n,2}(x) = 0$ თანაბრად x -ის მიმართ.

ანალოგიურად შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ თანაბრად x -ის მიმართ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n,3}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_{n,4}(x) = 0.$$

ლემა დამტკიცებულია.

თეორემა 1. ვთქვათ ფუნქცია $\frac{f_m(x)}{(1-x^2)^{1/4}}$ ინტეგრებადია $(-1; 1)$ შუალედზე და $f_m(x)$ ფუნქცია x_0 წერტილში,

$x_0 \in (-1; 1)$, აკმაყოფილებს A პირობას $A \in \{D; L; M; G\}$, მაშინ $f_m(x)$ ფუნქციის ვიგნერის მწკრივი x_0 წერტილში

კრებადია $\frac{f_m(x_0-) + f_m(x_0+)}{2}$ რიცხვისაკენ.

დამტკიცება. (6)-ის ძალით $S_{n,3}(x)$ ასე შეიძლება ჩავწეროთ

$$S_{n,3}(x) = \frac{(n+m+1)(n+3m+1)}{2^{2m+1}(n+2m-1)} \int_{-1+\delta}^{1-\delta} \frac{P_{mm}^{n+1}(x) \cdot P_{mm}^n(y) - P_{mm}^n(x) \cdot P_{mm}^{n+1}(y)}{x-y} \cdot f_m(y) dy.$$

უკანასკნელ ტოლობაში დავუშვათ $x = \cos \vartheta$, $y = \cos t$. მივიღებთ

$$S_{n,3}(\cos \vartheta) = \frac{(n+m+1)(n+3m+1)}{2^{2m+1}(n+2m-1)} \times \\ \times \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{P_{mm}^{n+1}(\cos \vartheta) \cdot P_{mm}^n(\cos t) - P_{mm}^n(\cos \vartheta) \cdot P_{mm}^{n+1}(\cos t)}{\cos t - \cos \vartheta} \cdot f_m(\cos t) \cdot \sin t dt. \quad (18)$$

P_{mm}^n და P_{mm}^{n+1} ფუნქციებისათვის ვისარგებლოთ ასიმპტოტური წარმოდგენის ფორმულით [6]:

$$P_{mm}^n(\cos \vartheta) = \frac{\sqrt{2} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{(n-m) \cdot \pi \cdot \sin \vartheta}} + \frac{c_1}{\sqrt{(n-m)^3}}, \quad 0 < \vartheta < \pi$$

$$P_{mm}^{n+1}(\cos \vartheta) = \frac{\sqrt{2} \cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{(n-m+1) \cdot \pi \cdot \sin \vartheta}} + \frac{c_2}{\sqrt{(n-m)^3}}, \quad 0 < \vartheta < \pi.$$

ამ ფორმულების დახმარებით გამოსახულება $P_{mm}^{n+1}(\cos \vartheta) \cdot P_{mm}^n(\cos t) - P_{mm}^n(\cos \vartheta) \cdot P_{mm}^{n+1}(\cos t)$ ასე შეიძლება ჩავწეროთ

$$P_{mm}^{n+1}(\cos \vartheta) \cdot P_{mm}^n(\cos t) - P_{mm}^n(\cos \vartheta) \cdot P_{mm}^{n+1}(\cos t) = \frac{2}{\pi} \times \\ \times \frac{\cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t - \frac{\pi}{4} \right] - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) t - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{(n-m)(n-m+1) \cdot \sin \vartheta \cdot \sin t}} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{c_1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi \cdot (n-m+1)(n-m)^3}} \cdot \left\{ \frac{\cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \vartheta}} - \frac{\cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) t - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin t}} \right\} - \\
 & - \frac{c_2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{\pi (n-m)(n-m+1)^3}} \cdot \left\{ \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \vartheta}} - \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin t}} \right\}.
 \end{aligned}$$

ლაგრანჟის თეორემის თანახმად გვაქვს

$$\begin{aligned}
 & P_{mm}^{n+1}(\cos \vartheta) \cdot P_{mm}^n(\cos t) - P_{mm}^n(\cos \vartheta) \cdot P_{mm}^{n+1}(\cos t) = \frac{2}{\pi} \times \\
 & \times \frac{\cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t - \frac{\pi}{4} \right] - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) t - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{(n-m)(n-m+1) \cdot \sin \vartheta \cdot \sin t}} + \\
 & + \frac{\sqrt{2} \cdot c_1 \cdot (\vartheta - t)}{\sqrt{\pi \cdot (n-m+1)(n-m)^3}} \cdot \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) \tau - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \tau}} \right\}_{\tau=\xi_1} - \frac{\sqrt{2} \cdot c_2 \cdot (\vartheta - t)}{\sqrt{\pi (n-m)(n-m+1)^3}} \times \\
 & \times \frac{d}{d\tau} \left\{ \frac{\cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \tau - \frac{\pi}{4} \right]}{\sqrt{\sin \tau}} \right\}_{\tau=\xi_2}, \quad t < \xi_1 < \vartheta, \quad t < \xi_2 < \vartheta. \quad (19)
 \end{aligned}$$

თუ (19)-ს ჩავსვამთ (18)-ში მივიღებთ სამ შესაკრებლს I_1 , I_2 და I_3 . I_2 და I_3 შესაკრებლებისათვის გავითვალისწინოთ, რომ

$$\cos t - \cos \vartheta = (\vartheta - t) \cdot \sin \xi, \quad t < \xi < \vartheta.$$

ამ შესაკრებიდან თითოეულის მოდული ნაკლები იქნება სიდიდეზე

$$\frac{c}{n} \cdot \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} f_m(\cos t) \cdot \sin t dt,$$

რომელიც ცხადია თანაბრად მიისწრაფვის ნულისაკენ, როცა $n \rightarrow \infty$.

შევისწავლოთ I_1 შესაკრები. გვაქვს

$$\begin{aligned}
 I_1 & = \frac{(n+m+1)(n+3m+1)}{2^{2m} \cdot \pi \cdot (n+2m-1)} \cdot \frac{1}{\sqrt{(n-m)(n-m+1) \cdot \sin \vartheta}} \times \\
 & \times \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{\cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) t - \frac{\pi}{4} \right] - \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) \vartheta - \frac{\pi}{4} \right] \cdot \cos \left[\left(n + \frac{3}{2} \right) t - \frac{\pi}{4} \right]}{\cos t - \cos \vartheta} dt
 \end{aligned}$$

$$\times f_m(\cos t) \cdot \sqrt{\sin t} dt.$$

უკანასკნელ გამოსახულებაში მონაწილე ინტეგრალის მრიცხველში მდგომი გამოსახულება ასე შეიძლება ჩაიწეროს:

$$\sin[(n+1)(\vartheta-t)] \cdot \sin \frac{\vartheta+t}{2} - \cos[(n+1)(\vartheta+t)] \sin \frac{\vartheta-t}{2}.$$

ამიტომ

$$\begin{aligned} I_1 = & \frac{(n+m+1)(n+3m+1)}{2^m \pi(n+2m-1)\sqrt{(n-m)(n-m+1)} \cdot \sin \vartheta} \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{\sin[(n+1)(\vartheta-t)]}{\sin \frac{\vartheta-t}{2}} \cdot \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt - \\ & - \frac{(n+m+1)(n+3m+1)}{2^m \pi(n+2m-1)\sqrt{(n-m)(n-m+1)} \cdot \sin \vartheta} \cdot \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{\sin[(n+1)(\vartheta+t)]}{\sin \frac{\vartheta+t}{2}} \cdot \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt. \end{aligned} \quad (20)$$

უკანასკნელი ტოლობის მეორე შესაკრებისათვის გამოვიყენოთ კრებადობის ზოგადი თეორემა. ვთქვათ

$$F(\vartheta, t, n) = \begin{cases} \frac{\cos[(n+1)(\vartheta+t)]}{\sin \frac{\vartheta+t}{2}}, & \text{roca } t \in (\vartheta-\eta'; \vartheta+\eta); \\ 0, & \text{roca } t \notin (\vartheta-\eta'; \vartheta+\eta). \end{cases}$$

ცხადია $|F(\vartheta, t, n)|$ შემოსაზღვრულია. გარდა ამისა, ნებისმიერი $(\alpha; \beta)$ შუალედისათვის გვაქვს

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} F(\vartheta, t, n) dt &= \frac{1}{\sin \frac{\vartheta+\alpha}{2}} \cdot \int_{\alpha}^{\xi} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (\vartheta+t) \right] dt + \\ &+ \frac{1}{\sin \frac{\vartheta+\beta}{2}} \cdot \int_{\xi}^{\beta} \cos \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (\vartheta+t) \right] dt, \end{aligned}$$

სადაც ξ რაიმე რიცხვია (α, β) შუალედიდან. უკანასკნელი ტოლობიდან გვაქვს, რომ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} F(\vartheta, t, n) dt = 0$$

თანაბრად ϑ -ს მიმართ $\vartheta \in (\varepsilon; \pi - \varepsilon)$. ამიტომ კრებადობის ზოგადი თეორემის ძალით თანაბრად ϑ -ს მიმართ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+m+1)(n+3m+1)}{2^m \pi(n+2m-1)\sqrt{(n-m)(n-m+1)} \cdot \sin \vartheta} \cdot \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{\cos[(n+1)(\vartheta+t)]}{\sin \frac{\vartheta+t}{2}} \cdot \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt = 0.$$

შევისწავლოთ (20) ტოლობის პირველი შესაკრები, ვაჩვენოთ, რომ თანაბრად ϑ -ს მიმართ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{\sin[(n+1)(\vartheta-t)]}{\sin \frac{\vartheta-t}{2}} \cdot \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (\vartheta-t) \right]}{\sin \frac{\vartheta-t}{2}} \times$$

$$\times \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt. \quad (21)$$

განვიხილოთ ინტეგრალი

$$\int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{\sin[(n+1)(\vartheta-t)] - \sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (\vartheta-t) \right]}{\sin \frac{\vartheta-t}{2}} \cdot \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt =$$

$$= \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{\cos \left[\left(n + \frac{3}{4} \right) (\vartheta-t) \right]}{\cos \frac{\vartheta-t}{4}} \cdot \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt =$$

$$= \frac{1}{\cos \frac{\eta'}{4}} \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\xi} \cos \left[\left(n + \frac{3}{4} \right) (\vartheta-t) \right] \cdot \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt +$$

$$+ \frac{1}{\cos \frac{\eta}{4}} \int_{\vartheta-\xi}^{\vartheta+\eta} \cos \left[\left(n + \frac{3}{4} \right) (\vartheta-t) \right] \cdot \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt,$$

სადაც ξ რაიმე რიცხვია $(-\eta'; \eta)$ შუალედიდან.

თუ ჩავატარებთ მსგავს მსჯელობას, როგორც ჩავატარეთ (20) ტოლობის მარჯვენა მხარეს მეორე შესაბამისი დადრწმუნდებით, რომ უკანასკნელი ტოლობის მარჯვენა მხარე თანაბრად მიისწრაფვის ნულისაკენ. ამით დავამტკიცეთ (21) ტოლობის მართებულობა.

საბოლოოდ შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ თანაბრად ϑ -ს მიმართ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n,3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+m+1)(n+3m+1)}{2^m \pi (n+2m-1) \sqrt{(n-m)(n-m+1)} \sin \vartheta} \times$$

$$\times \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (\vartheta-t) \right]}{\sin \frac{\vartheta-t}{2}} \cdot \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt. \quad (22)$$

ამრიგად, (11) ტოლობიდან ლემა 1, ლემა 2 და (22) ტოლობის საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნა, რომ

$$\text{თუ არსებობს } \int_{-1}^1 \frac{f(x)}{(1-x^2)^{1/4}} dx, \text{ მაშინ}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m \cdot \pi \cdot \sqrt{\sin \vartheta}} \cdot \int_{\vartheta-\eta'}^{\vartheta+\eta} \frac{\sin \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) (\vartheta - t) \right]}{\sin \frac{\vartheta - t}{2}} \cdot \sqrt{\sin t} \cdot f_m(\cos t) dt, \quad x = \cos \vartheta,$$

თანაბრად x -ის მიმართ $x \in (-1; 1)$. აქედან გამომდინარეობს, რომ (2) მწკრივის კრებადობის შესწავლა დაიყვანება $f_m(\cos \vartheta) \cdot \sqrt{\sin \vartheta}$ ($x = \cos \vartheta$) ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობის შესწავლაზე. ამიტომ x_0 წერტილში $f_m(x)$ ფუნქციის ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივის კრებადობის საკმარისი ნიშნები სათანადო ფორმულირებით მართებულია ვიგნერის მწკრივის კრებადობისათვისაც.

ჩატარებული მტკიცებიდან გამომდინარეობს შემდეგი თეორემის მართებულობა.

თეორემა 2. ვთქვათ $\frac{f_m(x)}{(1-x^2)^{1/4}}$ ფუნქცია ინტეგრებადია $(-1; 1)$ შუალედზე და $f_m(x)$ ფუნქცია $(-1; 1)$

შუალედის შიგნით მდებარე რაიმე სეგმენტზე აკმაყოფილებს B პირობას, $B \in \{G^*, M^*, L^*\}$, მაშინ $f(x)$ ფუნქციის ვიგნერის მწკრივი თანაბრად კრებადია ამ სეგმენტზე.

მოყვანილი თეორემების მტკიცების გზიდან გამომდინარეობს, რომ ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობისა და თანაბრად კრებადობის სხვა ნიშნებიც სათანადო ფორმულირებით შეიძლება გადავიტანოთ ვიგნერის მწკრივებისათვის.

დასკვნა

განხილულია ფურიეს მწკრივი ვიგნერის მრავალწევრების მიმართ. დადგენილია ამ მწკრივის კერძო ჯამისა და მისი გულის სახე. დამტკიცებულია, რომ კერძო ჯამის ზღვრის არსებობა წერტილში, გარკვეულ პირობებში, დამოკიდებულია მხოლოდ ფუნქციის ყოფაცევაზე ამ წერტილისა და $(-1; 1)$ შუალედის ბოლოებში.

ნაშრომში მოცემული ფუნქციისათვის განსაზღვ-

რულია $D, L, M, G, G^*, M^*, L^*$ პირობები და ამ პირობების მეშვეობით ჩამოყალიბებულია ვიგნერის მრავალწევრების მიმართ ფურიეს მწკრივის წერტილში კრებადობისა და შუალედზე თანაბრად კრებადობის საკმარისი ნიშნები.

დამტკიცებული კრებადობის ნიშნები წარმოადგენს ფურიეს ტრიგონომეტრიული მწკრივების კრებადობის საკმარისი ნიშნების ანალოგებს ვიგნერის მრავალწევრების მიმართ ფურიეს მწკრივისათვის.

ლიტერატურა

1. Gelpandi, E., N., & shapiro, Z, I., (1952), Representation of three-dimensional space group rotations and their applications 3-117.
2. valenikini, I. A. Special function and theory of group representation, Moscow “nauka“.
3. Segaa.G. (1962), Orthogonal Polynomials, Moscow 1962.
4. Levinkov, S., S. (1992), On the similarity of furrow rows by generalized sperical function publishing House of Higher educational Institutions, mathematics, 1962, 92-103.
5. Gobsoni, I. V., (1952), theory of spherical ellipsoidal functions, Moscow.
6. Macharashvili, N., (2023), Some properties of Wigner polynomials. Transactions of the Georgian Technical University, 1(527), pp118-123.
7. Hobson, E., (1926), Theory of function of a real variable.

UDC 517

SCOPUS CODE 2603

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2024-4-200-214>

Convergence of fourier series with respect to wihner polynomials

Ani Eliashvili

Department of Mathematics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77, M. Kostava str.

E-mail: eliashvili@gmail.com

Nodar Macharashvili

Department of Mathematics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77, M. Kostava str.

E-mail: nodar54 @ yahoo.com

Reviewers:

Z. tsiklauri, Professor of the faculty of informatics and Management systemsof, GTU

E-mail: zviadsiklauri@yahoo.com

A Kirtadze, Professor of the faculty of informatics and Management systemsof, GTU

E-mail: kirtadze2@yahoo.com

Abstract. Classical orthogonal polynomials and their properties are well-known worldwide. In particular, Legendre, Jacob, Lager, Hagenbauer polynomials, and others. With these orthogonal polynomials, are determined the Fourier series and studying the presentation of functions by using these series. They also consider the issues of convergence of these series and summability by different methods.

During the study of the convergence and summability of the Fourier series with respect to the system of generalized spherical functions, it is necessary to consider the Fourier series with respect to the Wigner polynomials. Therefore, it is natural to study the convergence and summability of these series.

In this paper, the sufficient conditions for the convergence of the Fourier series with respect to the Wigner polynomials are reviewed. In particular, conditions similar to Din's and Jordan's conditions for Fourier's trigonometric series are given, and due these conditions, different signs of convergence for Fourier's series with respect to Wigner's polynomials are proved

Keywords: Convergence; Din; Fourier series; Jordan; Legendre; Wigner.

განხილვის თარიღი 24.06.2024

შემოსვლის თარიღი 28.06.2024

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 25.12.2024