

UDC 355/359

SCOPUS CODE 2205

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2021-4-80-91>

## მათემატიკური მოდელები ასიმეტრიული ომისთვის

### ლევან მაისურაძე

სამოქალაქო და სამრეწველო მშენებლობის, ტექნოლოგიისა და საშენი მასალების დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 68<sup>ბ</sup>  
E-mail: maisuradze.l@gmail.com

### რეცენზენტები:

**მ. სანიკიძე**, სტუ-ის ნაგებობების, სპეციალური სისტემებისა და საინჟინრო უზრუნველყოფის ინსტიტუტის პროფესორი, მაიორი

E-mail: m.sanikidze@gtu.ge

**თ. შუბლაძე**, სტუ-ის ნაგებობების, სპეციალური სისტემებისა და საინჟინრო უზრუნველყოფის ინსტიტუტის პროფესორი, თადარიგის გენერალ-მაიორი

E-mail: shubladze.tengiz@gmail.com

**ანოტაცია.** უილიამ ლანჩესტერის მიერ საბრძოლო მოდელებისთვის შემუშავებული დიფერენციალური განტოლებები დღემდე გამოიყენება სამხედრო თეორეტიკოსების მიერ. ასიმეტრიული ვითარება გვხვდება ბრძოლის ველზე ვიწრო გასასვლელებში, სადაც შეუძლებელია მთელი საცეცხლე ძალის კონცენტრირება. ლანჩესტერის განტოლების გამოყენების საფუძველზე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ პარიტეტის მისაღწევად საჭიროა სამიზნეების გასანადგურებლად ცეცხლის თანამიმდევრობით მასირება.

მოცემულ ნაშრომში განხილულია ასიმეტრიულ ბრძოლებში მათემატიკური მოდელების გამოყენე-

ბის მნიშვნელობა. მათი საშუალებით შესაძლებელია საბრძოლო გათამაშებების ჩატარება და დასკვნების გამოტანა.

ასევე დანაწევრებით ძალთა განადგურების მიზნით შემოთავაზებულია მათემატიკური მოდელი, რომლის საშუალებითაც შეგვიძლია განვსაზღვროთ, თითოეული ბრძოლისათვის როგორ უნდა დაიყოს მოწინააღმდეგის ძალები ოპტიმალურ რაოდენობად. კვლევის საფუძველზე განსაზღვრულია დროის ფაქტორის გავლენა მოულოდნელობის ეფექტზე და შემუშავებულია მათემატიკური მოდელი, რომლითაც შესაძლებელია მოწინააღმდეგესთან ბრძოლის ეფექტური პერიოდის დადგენა.

**საკვანძო სიტყვები:** ასიმეტრიული ომი; განტოლება; ლანჩესტერის მოულოდნელობის ფაქტორი; მათემატიკური მოდელი.

ბოლო შედეგები ყველა ტიპის კონფლიქტში, მათ შორის ასიმეტრიულ ომში.

## შესავალი

სამხედრო ოპერაციების კვლევისა და საბრძოლო მოდელირების აღსაწერად იყენებენ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემებს, რომლებიც პირველად 1916 წელს გამოიყენა ფრედერიკ უილიამ ლანჩესტერმა. მათი საშუალებით შესაძლებელი გახდა მრავალფეროვანი სამხედრო კონფლიქტების გაანალიზება დროსა და სივრცეში. თითოეული განტოლება გამოხატავდა ერთი მდგომარეობის ცვლილების სიჩქარეს სხვა ცვლადებთან მიმართებით. ლანჩესტერის განტოლებების საფუძველზე შემუშავებული ბოლოდროინდელი ლიტერატურა მორგებულია ისტორიულ ბრძოლებზე. ეს დიფერენციალური განტოლებები გამოიყენება სივრცისა და ურთიერთქმედების ეფექტების დასაფიქსირებლად. გვხვდება სხვადასხვა სფეროში, მაგალითად, ბიოლოგიაში, რეკლამებსა და ვიდეოთამაშებში. არსებობს ლანჩესტერის რამდენიმე მოდელი, რომლებიც განსხვავდება ერთმანეთისაგან ოპერატიული მდგომარეობისა და/ან ტაქტიკური ვითარების მიხედვით. აღნიშნული მოდელების ვარიაციებს დღესაც ფართოდ იყენებენ სამხედრო ანალიტიკოსები და ოპერატიული დამგეგმავები ძალთა სტრუქტურისა და საბრძოლო მოქმედებების შესასწავლად. მოდელებში ასახულია ორი დაპირისპირებული სამხედრო ძალის ურთიერთდამოკიდებულების დინამიკა. ისინი საშუალებას იძლევა დადგინდეს შემუშავებული სამოქმედო გეგმების სისწორე და პროგნოზირდეს სა-

## ძირითადი ნაწილი

ბრძოლის პროცესის შესწავლის უმნიშვნელოვანესი ასპექტია მისი რაოდენობრივი ანალიზი, რაც შემდგომში არაერთი მნიშვნელოვანი დასკვნის საშუალებას იძლევა. ძალთა კონცენტრაციით შესაძლებელია დანაკარგების შემცირება და მოწინააღმდეგის დამარცხება. ბრძოლის პროცესის მათემატიკური ანალიზის საფუძველია ლანჩესტერის განტოლებები, რომლებიც იძლევა საშუალებას, ბრძოლის ნებისმიერი მომენტისათვის გამოვთვალოთ მხარეთა საბრძოლო ერთეულების რაოდენობა:

$$\frac{dB}{dt} = -aR, \tag{1}$$

$$\frac{dR}{dt} = -\beta B,$$

სადაც  $B=B(t)$  და  $R=R(t)$  ცვლადებია, რომლებიც პირობითად აღნიშნავენ დაპირისპირებულ ლურჯ და წითელ ძალებს  $t$  დროისათვის. დამიზნებული ცეცხლის მოდელი წარმოადგენს საბრძოლო ვითარებას, როდესაც ლურჯი (წითელი) მხარის თითოეული მებრძოლი ეფექტურად ამცირებს წითელ (ლურჯ) ძალას განსაზღვრული ფიქსირებული  $\beta$ ,  $\alpha$  სიჩქარით. დამიზნებული ცეცხლის მოდელი არის ცვლადების გამოყოფით მიღებული მდგომარეობის განტოლება:

$$\beta(B_0^2 - B^2) = a(R_0^2 - R^2). \tag{2}$$

სადაც  $B_0$  და  $R_0$  არის ლურჯი და წითელი ძალების რაოდენობა ბრძოლის დასაწყისში. კერძოდ, როცა  $B_0, R_0, \beta$  და  $a$  მონაცემები ტოლია, ჩვენ ვიღებთ პარტიტულ პირობას:  $\beta B_0^2 = a R_0^2$  და ბრძოლა მთავრ-

დება ურთიერთგანადგურებით. იმ შემთხვევაში, თუ ერთ მხარეს, რომელსაც უფრო დიდი დაზიანების მაჩვენებელი აქვს, ავიყვანთ კვადრატში, იგი ბრძოლას იგებს. მიუხედავად იმისა, რომ ცვეთის (განადგურების) მაჩვენებელს აქვს წრფივი ეფექტი, ზომის ეფექტი კვადრატულია. განადგურების გაორმაგებული მაჩვენებელი იზრდება დანაკარგების პროპორციულად და, შესაბამისად, საბრძოლო რაოდენობის საშუალებებს აქვს კვადრატული ზემოქმედების ეფექტი. ამან განაპირობა ის, რომ მიზანმიმართული ცეცხლის მოდელს კვადრატული კანონი უწოდეს. კვადრატული კანონი ხაზს უსვამს ძალების კონცენტრაციის მნიშვნელობას. იგი ერთ-ერთი სამხედრო პრინციპია.

როგორც ცნობილია, (1) განტოლებათა სისტემის ამონახსნია:

$$R = R_0 ch\sqrt{a\beta} t - B_0 \sqrt{\frac{\beta}{a}} sh\sqrt{a\beta} t, \quad (3)$$

$$B = B_0 ch\sqrt{a\beta} t - R_0 \sqrt{\frac{a}{\beta}} sh\sqrt{a\beta} t.$$

ბრძოლის პროცესის ამ მათემატიკურ მოდელში რამდენიმე დაშვება იგულისხმება, რომლებიც მოდელს უადრესად მარტივსა და სქემატურს ხდის. ეს დაშვებებია:

1. მხარეებს აქვს თითო-თითო გვარეობის ძალები;
2. ეფექტური სწრაფსროლები  $a$  და  $\beta$  მუდმივებია. ისინი არ არის დამოკიდებული დროსა და ერთეულების სივრცით განლაგებაზე.
3. ბრძოლის პროცესზე არავითარ გავლენას არ ახდენს საბრძოლო ერთეულთა სივრცითი კოორდი-

ნატები, ამიტომ იგულისხმება, რომ მთელი პროცესი თითქოს ერთ წერტილში მიმდინარეობს.

ასეთი სიმარტივის გათვალისწინებით (1) სისტემიდან მაინც შეიძლება არაერთი დასკვნის გამოტანა, რომელთაც დიდი მნიშვნელობა აქვთ ტაქტიკის მრავალი საკითხის გარკვევისათვის.

დაშვებების გამო ლანჩესტერმა შეიმუშავა წრფივი კანონის ორი მოდელი. პირველი წრფივი კანონის მოდელს ასევე უწოდებენ უძველეს ბრძოლას. იგი მიიჩნევა, რომ ბრძოლა მოიცავს ინდივიდუალური დუელების კრებულს, რომლებიც ტიპურია ადრეული ისტორიის ბრძოლებისთვის. ასეთ ბრძოლაში მნიშვნელობა არ აქვს ძალების კონცენტრაციას. ამრიგად, განტოლების წყვილი მარტივია, აღწერს უძველეს ბრძოლას  $\beta(B_0 - B) = a(R_0 - R)$ . ამ შემთხვევაში ზემოქმედების ძალა წრფივია, ამიტომ ეწოდება მას ბრძოლის წრფივი კანონი.

$$\frac{dB}{dt} = -a, \quad (4)$$

$$\frac{dR}{dt} = -\beta,$$

მეორე წრფივი კანონი აღწერს არა დამიზნებულ ცეცხლს, სადაც ცეცხლის მოქმედება დამოკიდებულია არა მხოლოდ მისი გადარჩენილი ძალის ზომაზე, არამედ დაპირისპირებულ ძალთა სამიზნეების სიმჭიდროვეზეც. რადგან ცეცხლი არ არის დამიზნებული, მეორე მხარის დაზიანების ალბათობა დამოკიდებულია ზემოქმედების რაიონში სამიზნეების რაოდენობაზე. სწორედ ამის გამო უწოდებენ ამ მოდელს საცეცხლე რაიონის მოდელს. დიფერენციალური განტოლებების წყვილი ამ შემთხვევაში არის:

$$\frac{dB}{dt} = -aBR, \quad (5)$$

$$\frac{dR}{dt} = -\beta BR.$$

ლანჩესტერის კლასიკური მოდელის შესაბამისად გვაქვს კვადრატული და წრფივი განტოლებების სხვადასხვა ვარიანტი. ასევე, არსებობს ზემოთ აღწერილი განსაზღვრული ლანჩესტერული მოდელების ალბათობის ვერსიები, რომლებიც არსებითად უწყვეტი დროით მიმდინარე პროცესებია. მიუხედავად იმისა, რომ მათ იყენებენ ბრძოლის ველზე განსაზღვრული ალბათობების გათვალისწინებით, ნაკლებად გვხვდება გამოთვლითი სირთულისა და შედარებით შეზღუდული შესაძლებლობის გამო. ისინი გამოიყენება არაერთგვაროვანი საბრძოლო სიტუაციების დროს, როგორცაა, მაგალითად, ასიმეტრიული ომი.

ასიმეტრიული ბრძოლა ხდება მაშინ, როდესაც ორივე მხარე განსხვავებულ ტაქტიკას იყენებს და სახელმწიფოს რეგულარული ძალები ებრძვის პარტიზანებს ან აჯანყებულებს, რომლებიც იყენებენ ასიმეტრიულ საომარ ტაქტიკას. პირველი, ვინც აღწერა ეს ვითარება ლანჩესტერის განტოლების გამოყენებით, იყო დეიჩმანი, რომელმაც შეიმუშავა პირდაპირი ცეცხლისა და ფართობზე ცეცხლის შერეული მოდელი და მას უწოდა პარტიზანული ბრძოლის მოდელი. ერთი მხრივ, პარტიზანები, რომლებიც კარგად არიან შენიღბულნი და ჩასაფრებულნი ან შერეულნი მშვიდობიან მოსახლეობაში, მიმართავენ დამიზნებულ ცეცხლს რეგულარული ძალების წინააღმდეგ. მეორე მხრივ, რეგულარულ ძალებს მხოლოდ პარტიზანების წინააღმდეგ შეუძლიათ გამოიყენონ ფართობზე გახსნილი ცეცხლი.

აღნიშნული ძალების ეფექტურობა დამოკიდებულია პარტიზანი მებრძოლების სიმჭიდროვეზე. იმის გამო, რომ მათი რაოდენობა იკლებს (ნადგურდება), უფრო რთულდება ცოცხალი სამიზნის მოპოვება და მათზე ზემოქმედების ალბათობაც კლებულობს. თუ  $R$  არის რეგულარული ძალა, ხოლო  $B$  – პარტიზანებია, მაშინ ცვთის განტოლებები:

$$\frac{dB}{dt} = -pR \frac{B}{B_0}, \quad (6)$$

$$\frac{dR}{dt} = -\beta B.$$

მოცემული პირობებით ვიღებთ შემდეგ ტოლობას:

$$\beta(B_0^2 - B_0 B) = \frac{\alpha}{2}(R_0^2 - R^2) \quad (7)$$

(7) ფორმულა ლანჩესტერის ორი კანონის – კვადრატული კანონისა და წრფივი კანონის ნაზავია.

ბრძოლის ველზე პარტიზანები დამალული არიან, ხოლო რეგულარული ძალები ღიად მოქმედებენ, ამიტომ, პარტიზანებს აქვთ უპირატესობა რეგულარულ ძალებთან შედარებით. ეს უპირატესობა გამოიხატება მე-(8) განტოლებით:

$$\frac{\beta B_0^2}{\alpha R_0^2} = \frac{1}{2} \quad (8)$$

აქ უნდა გავითვალისწინოთ, რომ ბრძოლა ერთნაირ პირობებში მიმდინარეობს. წითელს (რეგულარული ძალა) დასჭირდება თავისი ეფექტურობის გაორმაგება ან საწყისი ძალების რაოდენობის გაზრდა, რომ მიაღწიოს პარტიზანების შესაძლებლობებთან თანაფარდობას.

მოცემულ ნაშრომში განხილულია ვითარება, როდესაც ასიმეტრიული ტაქტიკით მოქმედი ძალები სწორად იყენებენ რელიევის სამხედრო ასპექტებს, როგორცაა: დაფარვა და შენიღბვა; თვალთვალი და

საცეცხლე ველები; დაბრკოლებები; საკვანძო ადგილები; მიახლოების მარშრუტები. საკომუნიკაციო ხაზებზე ჩასაფრებები და მაღალი ღირებულების მიზნების გასანადგურებლად წარმოებული რეიდები მნიშვნელოვნად შეამცირებს მოწინააღმდეგის სიმეტრიული (კონვენციური) ტაქტიკის გამოყენების ეფექტიანობას. ასევე ადგილმდებარეობის ისეთი მახასიათებლების, როგორცაა მთაგორიანი რელიეფი და დასახლებული პუნქტები, მნიშვნელოვნად გაზრდის ასიმეტრიული ძალების მოქმედების თავისუფლებას.

ასიმეტრიული საბრძოლო ვითარება ვლინდება ვიწრო გადასასვლელებში, მაგალითად, უღელტეხილებზე ან ხიდებზე. დამცავი B ლურჯი ძალა ეფექტურად არის განლაგებული დომინირებულ ადგილებში ისე, რომ მას შეეძლოს ცეცხლის კონცენტრირება მოახლოებულ R წითელ შემტევ ძალაზე, რომელიც ადგილმდებარეობის შეზღუდვების გამო მოძრაობს ვიწრო კორიდორში. ამრიგად, ლურჯ ძალას შეუძლია გამოიყენოს პირდაპირი ცეცხლი მისი ყველა ქვედანაყოფიდან, ხოლო წითელს – მხოლოდ მისი წინა მოძრავი იარაღიდან. ამ სცენარისთვის ლანჩესტერის განტოლებებია:

$$\frac{dR}{dt} = -\beta B \quad (9)$$

$$\frac{dB}{dt} = -a$$

მე-9 განტოლებებით მიიღება  $\frac{B}{2}(B_0^2 - B^2) = a(R_0 - R)$  და პარიტეტური პირობაა:

$$\frac{\beta B_0^2}{\alpha R_0^2} = 2 \quad (10)$$

პარიტეტის მისაღწევად შემტევ და არახელსაყრელ მდგომარეობაში მყოფ წითელ ძალას დასჭირდება საწყისი ძალის კვადრატში აყვანა რომ ლურჯ ძალას გაუტოლდეს. ეს ბრძოლის მოდელი ასიმეტრიის განსხვავებული გამოვლინებაა ლანჩესტერის განტოლებათა სისტემაში, როდესაც ორივე მხარე არსებითად განსხვავებულ ტაქტიკას იყენებს.

განვიხილოთ დამიზნებული ცეცხლის სიტუაცია, როდესაც ერთი გვარეობის წითელი ძალა ებრძვის სხვადასხვა გვარეობის ლურჯ ძალას, რომელიც შედგება  $n$  რაოდენობის ქვედანაყოფებისგან  $B_1, \dots, B_n$ . ლურჯი  $n$  ქვედანაყოფები განსხვავდება საცეცხლე ეფექტურობითა და დაცულობით.  $a_i(\beta_i)$  – ით აღვნიშნოთ წითლის ( $R_i$ ) განადგურების სიჩქარე ლურჯის ( $B_i$ ) მიმართ,  $i = 1, \dots, n$ . მიუხედავად იმისა, რომ ლურჯი იყენებს ყველა თავის ერთეულს წითლის საწინააღმდეგოდ, ამ უკანასკნელს აქვს დილემა: როგორ განათავსოს ცეცხლი დინამიკურად დაპირისპირებულ ძალებს შორის. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, დროის მოცემულ  $t$  მონაკვეთში  $R_i(t)$ -ს რა ნაწილს  $p_i(t)$ -ს გამოყოფს ბრძოლაში ჩართვისთვის.

მოცემულ სიტუაციაში ლანჩესტერის განტოლება მიიღებს ასეთ სახეს:

$$\frac{dR}{dt} = -\sum_{i=1}^n \beta_i B_i(t),$$

$$\frac{dB}{dt} = -a_i(t)\beta_i B(t), i = 1, \dots, n,$$

სადაც ყველა

$$\sum_{i=1}^n p_i(t) = 1.$$

მანამდე წარმოდგენილი მოდელებისგან განსხვავებით, რომლებიც წმინდა აღწერითაა, (11)-ის მოდელს პირობითი ხასიათი აქვს. წითელი ძალების

გადასაწყვეტი პრობლემაა, თუ როგორ უნდა გაანაწილონ შეტევითი ძალისხმევა. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, დროის  $t$  ნებისმიერი მონაკვეთისთვის რა არის  $p_i(t)$ -ს ოპტიმალური მნიშვნელობები. ამ შემთხვევაში წითლების საუკეთესო ტაქტიკაა, ნებისმიერი  $t$  დროისთვის ბრძოლაში  $p_i(t)=1$  ჩართოს ლურჯი ძალების გარკვეული ერთეულისთვის  $i$  რაოდენობა. ეს არის ის წითელი ძალა, რომელმაც არ უნდა გაანაწილოს ერთდროულად მთელი ცეცხლი გარკვეულ ტერიტორიაზე. ის უნდა კონცენტრირდეს ერთი მიმართულებით ლურჯი ძალების წინააღმდეგ. უფრო მეტიც, წითელმა ძალებმა ლურჯი ქვედანაყოფების შესამცირებლად უნდა ჩართონ ბრძოლაში დროის ნებისმიერ მონაკვეთში  $\beta_i$  ძალები, რათა მოახდინონ ლურჯებზე წითელი ძალების ცეცხლის კონცენტრირება.

ზემოთ განხილული  $R$  ძალის მოქმედების საკასუხოად ასიმეტრიული ტაქტიკით მოქმედმა  $B$  ქვედანაყოფებმა (პარტიზანებმა) დამიზნებული ცეცხლით შეტევა ერთ წერტილში უნდა აწარმოონ მინიმუმ ორი მიმართულებიდან ( $B_x$  და  $B_y$  ანუ  $B_x > B_y$ ) ძალების არათანაბარი განაწილებით. ამ შემთხვევაში  $R$  ძალაზე ერთდროულად გახსნილი მასირებული საცეცხლე ზემოქმედება გაგრძელდება მოწინააღმდეგის საკასუხო ცეცხლის კონცენტრირებამდე (ვითარებაში გარკვევა, საბრძოლო მზადყოფნაში მოყვანა). აღნიშნული მომენტისთვის  $B_x$  ძალა დაუყოვნებლივ წყვეტს ცეცხლს და ტოვებს პოზიციებს, რათა მოწინააღმდეგემ ცეცხლის მასირება მოახდინოს  $B_y$  მცირე ძალების წინააღმდეგ. ამ შემთხვევაში იკლებს  $R$  ძალის მასირებული ცეცხლის ეფექტი და იზრდება  $B$  ძალის გადარჩენის შესაძლებლობა.

დავუშვათ,  $B$  მხარეს რიცხობრივად მნიშვნელოვნად აღემატება მოწინააღმდეგე  $R$  მხარე. რა თქმა უნდა, მათი პირდაპირი შეჯახება  $R$  მხარის სრული გამარჯვებით დამთავრდება. მაგრამ, თუ მოწინააღმდეგის ძალები სრულად არ გამოვლენ ბრძოლაში, მაშინ  $B$  მხარეს შეეძლება დაამარცხოს მისი რომელიმე ნაწილი. ერთ-ერთი ხერხი იმისა, რომ  $B$  მხარემ გაუწიოს ღირსეული წინააღმდეგობა მას და სრულად გაანადგუროს იგი, არის მოწინააღმდეგე ძალების დანაწილება ისეთ და იმდენ ნაწილად, რომ მოიგოს თითოეული ბრძოლა და საბოლოოდ – ოპერაცია.

შემოვიტანოთ პირობა, რომ სხვა ყველა ფაქტორი (იარაღის ხარისხი, სწრაფსროლა, ეფექტური სროლის სიხშირე, მებრძოლთა სულისკვეთება, ფსიქოლოგიური მომზადება, სხვა სახის საკითხების უზრუნველყოფის დონე, ლოგისტიკა და ა.შ.) თანაბარია.

$B$  მხარის გამარჯვებად მივიჩნით მომენტი, როცა ბრძოლები დამთავრებულია,  $R$  მხარე განადგურებულია მთლიანად, ხოლო  $B$  მხარეს დარჩა მებრძოლთა რაღაც რაოდენობა. შევთანხმდეთ, რომ  $B$  მხარეს ბრძოლის დაწყებამდე ჰყავს  $X_0$  რაოდენობის ჯარი, ხოლო  $R$  მხარეს –  $Y_0 = K \cdot X_0$  (სადაც  $K$  არის ძალთა თანაფარდობის კოეფიციენტი).

როგორც აღვნიშნეთ, ბრძოლის დინამიკის მათემატიკური მოდელირების თანახმად, პირდაპირი მებრძოლების შემთხვევაში  $B$  მხარე პირწმინდად წააგებს. ამიტომ, იგი ანაწევრებს მოწინააღმდეგეს რაღაც  $N$  ნაწილებად და ყველა ნაწილს ანადგურებს ცალ-ცალკე, ეტაპობრივად. ანუ, უნდა შეებრძოლოს მის ყოველ  $\frac{K \cdot X_0}{N}$  ნაწილს და  $n$  რაოდენობის

ბრძოლების შემდეგ სრულად უნდა განადგუროს მოწინააღმდეგე. ჩვენი ამოცანაა დავადგინოთ, რას უდრის  $N$ .

ლანჩესტერის განტოლების თანახმად,  $B$  მხარე შეებრძოლება რა  $R$  მხარის  $\frac{K \cdot X_0}{N}$  ნაწილს, პირველი ბრძოლის შემდგომ რჩება  $X_1$  რაოდენობის ძალები, რომელიც გამოისახება ფორმულით:

$$X_1 = \sqrt{X_0^2 - \left(\frac{K \cdot X_0}{N}\right)^2} = X_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{K}{N}\right)^2} \quad (12)$$

მეორე ბრძოლაში  $B$  მხარე ჩაებმება  $X_1$  ნაწილით, ხოლო  $R$  მხარე – ისევ  $\frac{K \cdot X_0}{N}$  ნაწილით. მეორე ბრძოლის შემდგომ  $B$  მხარეს დარჩება  $X_2$  ნაწილი, რომელიც ტოლი იქნება:

$$\begin{aligned} X_2 &= \sqrt{X_1^2 - \left(\frac{K \cdot X_0}{N}\right)^2} = \\ &= \sqrt{X_0^2 \left[1 - \left(\frac{K}{N}\right)^2\right] - \left(\frac{K \cdot X_0}{N}\right)^2} = \\ &= X_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{K}{N}\right)^2} \quad (13) \end{aligned}$$

იმავე მეთოდით,  $n-1$  ბრძოლის შემდგომ  $B$  მხარეს დარჩება:

$$X_{n-1} = X_0 \cdot \sqrt{1 - (n-1) \left(\frac{K}{N}\right)^2}$$

ძალები, ხოლო მოწინააღმდეგეს – ბოლო  $\frac{K \cdot X_0}{N}$  ძალები.

აღნიშნული ბრძოლის წინ,  $B$  მხარის დარჩენილმა საბრძოლო ერთეულებმა უნდა სძლიოს და დაამარცხოს  $R$  მხარის დარჩენილი  $\frac{K \cdot X_0}{N}$  ნაწილი. ეს

პირობა დააკმაყოფილებს ჩვენი ამოცანის მოთხოვნას, რადგან ანალიტიკური სტრატეგიის თანახმად, ეს შესაძლებელია მაშინ, როცა  $R$  მხარე რიცხობრივად სჭარბობს  $B$  მხარეს (როგორც თავიდანვე შეთანხმდით, სხვა ყველა საბრძოლო მაჩვენებელი ერთნაირია) ანუ, როცა:

$$X_{n-1} \geq \frac{K \cdot X_0}{N}, \text{ ე.წ.,}$$

$$X_0 \cdot \sqrt{1 - (n-1) \left(\frac{K}{N}\right)^2} \geq \frac{K \cdot X_0}{N} \quad (14)$$

თუ უტოლობის ორივე მხარეს ავიყვანთ კვადრატში და გავამარტივებთ, მივიღებთ:

$$1 - (n-1) \left(\frac{K}{N}\right)^2 \geq \frac{K^2}{N^2} \quad (15)$$

თუ ბრძოლათა  $n$  რაოდენობას მივიჩნევთ მოწინააღმდეგის დანაწევრების  $N$  რაოდენობის ტოლად  $n = N > 1$ , უტოლობა მიიღებს შემდეგ სახეს:

$$1 \geq \frac{K^2}{N}$$

ანუ (16)

$$N \geq K^2.$$

ეს არის კოეფიციენტი, რომელიც აჩვენებს, თუ რამდენ ნაწილად უნდა დაანაწილოს  $B$  მხარემ რიცხობრივად ჭარბი მოწინააღმდეგე, რომელიც აღება მას  $K$ -ჯერ, რათა გაიმარჯვოს მის ყოველ  $\frac{1}{N}$  ნაწილზე და  $N$  რაოდენობის ბრძოლის შემდგომ მიაღწიოს საბოლოო გამარჯვებას.

**პირობითად,  $N$  კოეფიციენტს შეგვიძლია „დანაწევრების“ კოეფიციენტი ვუწოდოთ.**

მაგალითი: თუ  $B$  მხარეს ჰყავს ათი მეგრძოლი ერთეული, ხოლო  $R$  მხარეს – ორმოცი (ანუ  $K=4$ ),  $B$  მხარეს შეეძლება მოუგოს ბრძოლები მოწინააღმდეგეს საბოლოოდ იმ შემთხვევაში, თუ მას არანაკ-

ლებ  $N \geq K^2 \geq 16$  ბრძოლას გაუმართავს და თითოეულ ბრძოლაში შეეებება მის  $\frac{1}{16}$  ნაწილს, ე.ი. არა უმეტეს მის 2,5 საბრძოლო ერთეულს.

ზემოთ მოყვანილი მაგალითიდან ჩანს, რომ B მხარე დაამარცხებს R მხარეს, თუ დააკმაყოფილებს პირობას, როდესაც ყველა ბრძოლაში მას მიაყენებს არანაკლებ  $R_d \geq \frac{K \cdot X_0}{N}$  დანაკარგს (რადგან  $N \geq K^2$ ,  $R_d$  უნდა იყოს  $\frac{X_0}{K}$ -ზე არანაკლები), ხოლო საკუთრივ B მხარის დანაკარგი ( $B_d$ ) არ აღემატება  $X_0 - X_1$ -ს ანუ

$$B_d \leq X_0 - X_0 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{K}{N}\right)^2} \leq X_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}\right) \quad (17)$$

იქმნება უტოლობათა სისტემა.

$$\begin{cases} R_d \geq \frac{X_0}{K} \\ B_d \leq X_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}\right) \end{cases} \quad (18)$$

შევადართ, როგორი უნდა იყოს შეფარდება ორივე მხარის დანაკარგს შორის, რათა დაკმაყოფილდეს საძებნი წინაპირობა.

$$\frac{R_d}{B_d} = \frac{\frac{X_0}{K}}{X_0 \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{K^2}}\right)} = \frac{1}{K - \sqrt{K^2 - 1}} \quad (19)$$

(19) გამოსახულება წარმოადგენს მხარეთა დანაკარგების შეფარდებას ბრძოლის წინა ეტაპზე, საიდანაც ჩანს, რომ თუ B მხარე დააკმაყოფილებს ამ პირობას და ბრძოლის იმ მომენტში, როდესაც თვითონ განიცდის დანაკარგს ერთი საბრძოლო ერთეულით, მას R მხარისათვის ამ დროს უკვე მიყენებული

ექნება ზარალი  $R_d \geq \frac{1}{K - \sqrt{K^2 - 1}}$  ოდენობით, მაშინ იგი საბოლოოდ მოიგებს ომს, წინააღმდეგ შემთხვევაში – წააგებს.

მოულოდნელობის ეფექტის გამოყენებით ჭარბი ძალის მქონე მოწინააღმდეგის – R-ის დამარცხება შეუძლია მცირერიცხოვან B ძალას. ამ შემთხვევაში მნიშვნელოვანია მცირერიცხოვანმა ძალამ ბრძოლება აწარმოოს მოწინააღმდეგესთან ისეთი გათვლით, რომ თითოეულ შეტაკებაში ყოველი ერთი  $f$  დანაკარგი ტოლი ან მეტი იყოს  $K$  სიდიდის ორმაგი მნიშვნელობისა. ის მოწინააღმდეგეს ზიანს აყენებს ისე, რომ თვითონ ჯერ დანაკარგი არ განუცდია. იმ მომენტში, როდესაც მოწინააღმდეგე შეძლებს მიაყენოს B მხარეს რაღაც  $f$  დანაკარგი, მაშინ მოწინააღმდეგე მხარის დანაკარგი აღემატება  $B_d \geq 2Kf$ -ს და B მხარე იგებს ბრძოლას. მისთვის მთავარია, ბრძოლა ისე დაგეგმოს და აწარმოოს, რომ ხელსაყრელ პერიოდში „ამოაკლოს“ მოწინააღმდეგეს დანაკარგების წინასწარ გათვლილი სიდიდე და გავიდეს კონტაქტიდან. ამის გათვალისწინებით გამოსახულება იღებს შემდეგ სახეს:

$$\begin{cases} B_d \leq f, \\ R_d \geq 2 \cdot K \cdot f. \end{cases} \quad (20)$$

დავუშვათ, არსებობს დროის რაღაც  $\Delta t$  მონაკვეთი, როდესაც B მხარე იწყებს ზემოქმედებას R მხარეზე, ხოლო ეს უკანასკნელი ჯერ ვერ პასუხობს მას ანუ მისი მსროლელი ერთეულები ან ვერ აწარმოებენ საპასუხო სროლას საბრძოლო მდგომარეობაში არყოფნის გამო, ან მათი სროლის ეფექტურობა ნულის ტოლია. ამის მიზეზი შეიძლება იყოს სადაზვერვო ინფორმაციის არქონა. ამიტომ ვერ ხორციელდება დამიზნებით სროლა. ე.ი., დროის  $\Delta t$  მონაკვეთით

სათვის B მხარეს ეყოლება ისევ  $X_0$  რაოდენობის საბრძოლო ერთეულები, ხოლო დანაკარგები, რასაც R მხარე განიცდის, გამოსახული იქნება წრფივი სიდიდით:

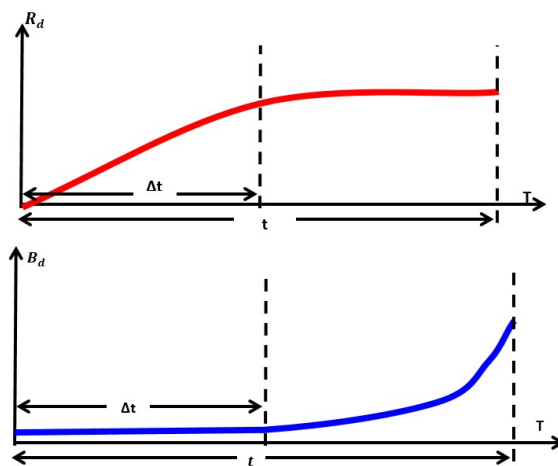
$$R_d = X_0 \cdot \beta \cdot \Delta t \quad (21)$$

სადაც  $\beta$  არის B მხარის საბრძოლო ერთეულის ეფექტური სწრაფსროლა.

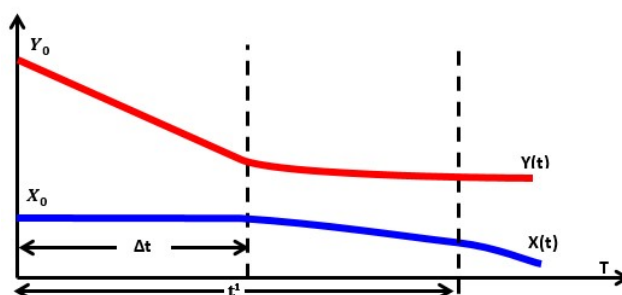
ამ გამოსახულების „სწორხაზოვნება“ ნიშნავს იმას, რომ ჯერჯერობით ლანჩესტერის განტოლებათა სისტემა „არ მუშაობს“. იგი „ამუშავდება  $\Delta t$  დროის შემდეგ, როცა R მხარე „გონს მოვა“, მოი-

პოვებს რაღაც რაოდენობის სადაზვერვო ინფორმაციას, მოვა საბრძოლო მზადყოფნაში და შეუდგება დამიზნებით სროლას. გარკვეული დროის შემდგომ მისი სწრაფსროლა რაღაც კანონზომიერებით გაუტოლდება თავის მაქსიმუმს.

გრაფიკულად ამ დამოკიდებულებას ექნება ისეთი სახე, როგორც პირველ სურათზეა გამოსახული, ხოლო დაუზიანებელი (გადარჩენილი) ძალების რიცხოვრივი რაოდენობა  $X(t)$  და  $Y(t)$  ბრძოლის ნებისმიერი მომენტისათვის ზოგადად დახასიათდება გრაფიკით, როგორც ეს ნაჩვენებია მე-2 სურ-ზე.



სურ. 1. R და B მხარეების დანაკარგების გრაფიკი



სურ. 2. დაუზიანებელი (გადარჩენილი) ძალების რაოდენობა დროის მიხედვით

$\Delta t$  დროის ის მონაკვეთია, როცა  $B$  მხარე ცალსახად იგებს ბრძოლას, ამ დროის განმავლობაში  $\beta$  მაქსიმალურია, ხოლო  $R$  მხარის საბრძოლო ერთეულის ეფექტური სწრაფსროლა  $\alpha=0$ . ბრძოლის სცენარში ეს თეორიულადაც და პრაქტიკულადაც შესაძლებელია  $B$  მხარის მიერ ფარულობისა და მოულოდნელობის ელემენტების მაქსიმალურად გამოყენებით. უნდა ვივარაუდოთ, რომ  $\Delta t$  დროის შემდეგ  $R$  მხარე მოახერხებს გარკვეული ინფორმაციის მოპოვებას, რის შემდეგაც  $\alpha$  დაიწყებს ზრდას. თეორიულად შესაძლებელია, რომ იგი ნულიდან მყისიერად გახდეს მაქსიმალური, მაგრამ ამას არსებითი მნიშვნელობა არ აქვს. მთავარია, რომ არსებობს დროის რაღაც  $t_1$  მონაკვეთი, როდესაც  $B$  მხარისათვის ბრძოლის წარმოება ჯერ კიდევ მიზანშეწონილია, ხოლო დროის ამ მონაკვეთის ამოწურვის შემდეგ  $B$  მხარე იწყებს წაგებას.

$t_1$  ის კრიტიკული დროა, სადაც ჯერ კიდევ უტოლობათა სისტემას აკმაყოფილებს მოცემული ამონახსნები ანუ როცა „ამოკლების“ კოეფიციენტის მოთხოვნა ჯერ კიდევ სრულდება.

$t_1$  დროის შემდეგ  $B_a$  დანაკარგების რაოდენობა იზრდება, ამიტომ  $B$  მხარე უნდა გაერიდოს ბრძოლას ან ამ მონაკვეთზე დატოვოს ბრძოლა და მაშინვე

შექმნას ფარულობის სრული დაცვით მოულოდნელობის ახალი მომენტი უკვე სხვა მონაკვეთზე, ბრძოლა კი ახალი სცენარით გააგრძელოს, ოღონდ ისევ იმავე პრინციპების დაცვით. რაც უფრო მეტი ახალი სცენარი იქნება მომზადებული და რაც უფრო ხშირად ჩავარდება მოწინააღმდეგე მისთვის უცხო ვითარებაში, მით უფრო ჩქარა ამუშავდება მისი დამარცხების ისეთი ფაქტორები, რომლებიც მარტო მათემატიკური დანაკარგების სიდიდით არ განისაზღვრება.

### დასკვნა

ნაშრომში გამოყენებული აპრობირებული და ახალი მათემატიკური მოდელები საშუალებას იძლევა გაანალიზდეს ასიმეტრიულ ბრძოლებში ცეცხლის წარმოების ეფექტურობა, რათა ლურჯმა ძალამ (პარტიზანებმა) მიზანმიმართულად გაანაწილოს საბრძოლო ძალა და ჩამოაყალიბოს მოწინააღმდეგის დანაწევრებისა და დამარცხების ოპტიმალური მოდელი. მათემატიკურად გამოანგარიშებული მოულოდნელობის ეფექტი ასევე ძირითადი დასკვნების საშუალებას იძლევა ასიმეტრიული ტაქტიკის სწორად გამოყენებისთვის.

### ლიტერატურა

1. Barkalaia, G., Melashvili, D. (1997). On the mathematical model of combat dynamics and its application. *Military Equipment*, 5 (In Georgian);
2. Barkalaia, G. (1996). Game Theory and Decision Making in a Conflict Situation. *Military Equipment*, . (In Georgian);
3. Barkalaia, G., Melashvili, D. (2001). Mathematical model of combat dynamics in the conditions of territorial distribution of hostilities. *Proceedings of the National Defense Academy*, 1 (In Georgian);
4. Washburn, A., Kress, M. (2009). *Combat Modeling*. Springer: New York, NY, USA;
5. Kress, M. (2012). Modeling armed conflicts. Retrieved from science.org: <https://syr.us/Rxj>

6. Lanchester, F.W. (1916). Aircraft in Warfare: The Dawn of the Fourth Arm. *Constable and Co.: London, UK*;
7. Brown, G., Washburn, A. (2007). The Fast Theater Model (FATHM). *Military Operations Research*;
8. Sahni, M., Das, S.K. (2015). Performance of maximum likelihood estimator for fitting Lanchester equations on KurskBattle data. *J. Battlef. Technol, 18*, 23-30;
9. Lucas, T.W., Turkes, T. (2004). Fitting Lanchester equations to the battles of Kursk and Ardennes. *Naval Research Logistics, 51*;
10. Eldridge, S.A., Mesterton-Gibbons, M. (2003). Lanchester's attrition models and fights among social animals. *Behavioral Ecology 14 (5)*, 719–723. DOI: 10.1093/beheco/arg061;
11. Deitchman, S. J (1962). A Lanchester model of guerrilla war. *Operations Research, 10(6)*.  
<https://doi.org/10.1287/opre.10.6.818>;
12. Kress, M., MacKay, N. (2014). Bits or Shots in Combat? The Generalized Deitchman Model of Guerrilla Warfare. *Operations Research Letters, 42(1)*, DOI: 10.1016/j.orl.2013.08.004;
13. Kress, M., Caulkins, J.P., Feichtinger, G., Grass, D., Seidl, A. (2018). Lanchester model for three-way combat. *European Journal of Operational Research, 264 (1)*, 46-54;
14. Ventcel, E.S. (1964). *Introduction to Operations Research*. Moscow: Soviet radio. (In Russian);
15. Mityukov, N.V. (2011). *Simulation in military history*. Ed. 2. – Moscow: Publishing house of LCI, (In Russian);
16. Novikov, D.A. (2012). Hierarchical models of military operations. *Management of large systems, 37* (In Russian).

UDC 355/359

SCOPUS CODE 2205

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2021-4-80-91>

## Mathematical Models for Asymmetric Warfare

**Levan Maisuradze** Department of Civil and Industrial Engineering, Technology and Building Materials, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 68<sup>b</sup> M. Kostava str.  
E-mail: maisuradze.l@gmail.com

### Reviewers:

**M. Sanikidze**, Major, Professor, Institute of Construction, Special Systems and Engineering, GTU  
E-mail: m.sanikidze@gtu.ge

**T. Shubladze**, Retired Major General, Professor, Institute of Construction, Special Systems and Engineering, GTU  
E-mail: shubladze.tengiz@gmail.com

**Abstract.** Differential equations developed by William Lanchester for combat models are still used by military theorists in traditional and asymmetric wars. The paper focuses on the asymmetric situation encountered in narrow exits on the battlefield, where it is impossible to concentrate the entire firepower. Based on the application of the Lancaster Equation, it is determined that in order to achieve parity, it is necessary to destroy targets by sequentially massaging fire. The mathematical model proposed for the destruction of forces by divisions even allows to determine how to divide the opposing forces into the optimal number for each battle. Based on the research, the influence of

the time factor on the element of surprise is determined and a mathematical model is developed, which can determine the effective period of fighting the opponent.

**Keywords:** asymmetric war; element of surprise; mathematical model; the Lanchester equation.

---

UDC 355/359

SCOPUS CODE 2205

[HTTPS://DOI.ORG/10.36073/1512-0996-2021-4-80-91](https://doi.org/10.36073/1512-0996-2021-4-80-91)

## Математические модели асимметричной войны

**ლევან მაისურაძე**      Департамент технологии гражданского и промышленного строительства и строительных материалов, Грузинский технический университет, Грузия, 0160, Тбилиси, ул. М. Костава 68<sup>б</sup>  
E-mail: maisuradze.l@gmail.com

### Рецензенты:

**М. Саникидзе**, майор, профессор Института строительства, специальных систем и инженерного обеспечения ГТУ

E-mail: m.sanikidze@gtu.ge

**Т. Шубладзе**, генерал-майор в отставке, профессор Института строительства, специальных систем и инженерного обеспечения ГТУ

E-mail: shubladze.tengiz@gmail.com

**Аннотация.** Дифференциальные уравнения, разработанные Уильямом Ланчестером для боевых моделей, до сих пор используются военными теоретиками в традиционных и асимметричных войнах. В статье рассматривается асимметричная ситуация, возникающая в узких выходах на поле боя, где невозможно сосредоточить всю огневую мощь. На основе применения уравнения Ланчестера определено, что для достижения паритета необходимо уничтожать цели последовательным массированным огнем. А предложенная математическая модель поражения войск дивизиями позволяет определить, как разделить противоборствующие силы на оптимальные количества для каждого боя. На основе исследования определяется влияние фактора времени на эффект внезапности и разработана математическая модель, которая позволяет определить эффективный период борьбы с противником.

**Ключевые слова:** асимметричная война; математическая модель; уравнение Ланчестера; фактор внезапности.

*განხილვის თარიღი 16.11.2021*

*შემოსვლის თარიღი 19.11.2021*

*ხელმოწერილია დასაბეჭდად 28.12.2021*