

UDC 511.5

SCOPUS CODE 2607

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2020-4-150-188>

ზოგიერთი საინტერესო ამოცანა რიცხვთა კლასიკური თეორიიდან

ზურაბ აღდგომელაშვილი მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: diophant_zura@rambler.ru

რეცენზენტები:

ალ. კირთაძე, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი
E-mail: kirtadze2@yahoo.com

ქ. შავგულიძე, ივ. ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის ასოც. პროფესორი
E-mail: ketevan.shavgulidze@tsu.ge

ანოტაცია. მნიშვნელოვანია p და q მარტივ რიცხვთათვის $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის იმ მარტივ გამყოფთა რაოდენობის დადგენა, რომლებიც p -ზე ნაკლებია. ამ მიზნით განვიხილოთ თეორემები:

თეორემა 1. ვთქვათ, p და q კენტი მარტივი რიცხვებია და $p = 2q + 1$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის სათითაოდ აღებული განსხვავებული მარტივი გამყოფებიდან მხოლოდ ერთია p -ზე ნაკლები. A -ს აქვს მინიმუმ ორი განსხვავებული მარტივი გამყოფი მაინც;

თეორემა 2. ვთქვათ, p და q კენტი მარტივი რიცხვებია და $p < 2q + 1$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის ყველა მარტივი გამყოფი მეტია p -ზე;

თეორემა 3. ვთქვათ, q კენტი მარტივი რიცხვია და $p \in N \setminus \{1\}$, $p \in [1; q] \cup [q + 2; 2q]$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის სათითაოდ აღებული განსხვავებული მარტივი გამყოფებიდან თითოეული მეტია p -ზე;

თეორემა 4. ვთქვათ, q კენტი მარტივი რიცხვია და $p \in \{q + 1; 2q + 1\}$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის სათითაოდ აღებული განსხვავებული მარტივი გამყოფებიდან, მხოლოდ ერთია p -ზე ნაკლები. A -ს აქვს მინიმუმ ორი განსხვავებული მარტივი გამყოფი მაინც.

ამოცანა 1. ამოვხსნათ განტოლება $2^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ ნატურალურ x, y, z რიცხვებში, ამასთან y უნდა იყოს მარტივი რიცხვი.

ამოცანა 2. ამოვხსნათ განტოლება $3^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ ნა-

ტურალურ x, y, z რიცხვებში, ამასთან y უნდა იყოს მარტივი რიცხვი.

ამოცანა 3. ამოვხსნათ განტოლება $p^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$,

სადაც $p \in \{6; 7; 11; 13; \dots\}$ მარტივი რიცხვია $x, y \in N$ და y მარტივია.

ქვემოთ მოცემული ლემის მეშვეობით ადვილად ამოიხსნება ამოცანათა კლასი:

ლემა •. ვთქვათ, $a, b, n \in N$ და $(a, b) = 1$. დავამტკიცოთ, რომ თუ $a^n \equiv 0 \pmod{|a - b|}$ ან $b^n \equiv 0 \pmod{|a - b|}$, მაშინ $|a - b| = 1$.

ამოვხსნათ განტოლებები (I - X) ნატურალურ x, y რიცხვებში:

$$I. \left(\frac{x+y}{2}\right)^z = x^z - y^z;$$

$$VI. (x+y)^{x-y} = x^y;$$

$$II. (x+y)^z = (2x)^z + y^z;$$

$$VII. (x+y)^{x-y} = y^x;$$

$$III. (x+y)^z = (3x)^z + y^z;$$

$$VIII. (x+y)^y = (x-y)^x, (x > y);$$

$$IV. (y-x)^{x+y} = x^y, (y > x);$$

$$IX. (x-y)^{x+y} = x^{x-y};$$

$$V. (y-x)^{x+y} = y^x, (y > x);$$

$$X. (x+y)^{x-y} = (x-y)^x, (y > x).$$

თეორემა *. თუ $a, b \in N$ $(a, b) = 1$, მაშინ $(a^2 + ab + b^2)$ -ის ყოველ გამყოფს აქვს ასეთივე სახე.

შემოტანილია ფსევდოფიბონაჩის რიცხვების ცნება და ნაპოვნია მათი ზოგიერთი თვისება.

საკვანძო სიტყვა ფსევდოფიბონაჩის რიცხვები.

შესავალი

განტოლებათა მთელ რიცხვებში ამოხსნა წარმოადგენს მათემატიკის ერთ-ერთი ულამაზესი ნაწილია. დროთა განმავლობაში გროვდებოდა კონკრეტული დიოფანტური განტოლებების ამოხსნის მრავალი წესი, მაგრამ მათი გამოკვლევის ზოგადი მეთოდები მხოლოდ XX საუკუნეში შეიქმნა. 1900 წელს მათემატიკოსთა მეათე საერთაშორისო კონგრესზე, რომელიც პარიზში ჩატარდა, ცნობილმა გერმანელმა მათემატიკოსმა დ. ჰილბერტმა თავის მოხსენებაში ჩამოაყალიბა 23 ძირითადი მათემატიკური პრობლემა. ჰილბერტის მეათე პრობლემას ეწოდა „დიოფანტური განტოლებების ამოხსნის ამოცანა“, რომლის არსი შემდეგში მდგომარეობდა: მოცემულია მთელკოეფიციენტებიანი დიოფანტური განტოლება რამდენიმე უცნობით. არსებობს თუ არა ალგორითმი სასრული რაოდენობის ოპერაციებისა, რათა მოცემული განტოლება ამოიხსნას მთელ რიცხვებში.

უნდა აღინიშნოს, რომ რიცხვთა თეორიის სპეციალისტებმა იპოვეს მრავალი დიოფანტური განტოლების ამოხსნის მეთოდი და დაადგინეს ბევრი მათგანის ამოხსნის შეუძლებლობა, მაგრამ ზოგადი მეთოდის მოძებნა მაინც მოხერხდა. ჰილბერტის მიერ იყო დასმული ამოცანა უნივერსალური მეთოდის არსებობის შესაძლებლობის შესახებ. ცნობილმა რუსმა მათემატიკოსმა ი.მატიასევიჩმა 1970 წელს

დაამტკიცა, რომ ასეთი ზოგადი წესი არ შეიძლება არსებობდეს.

ვაჩვენოთ, რომ ერთი უმარტივესი ლემის მეშვეობით ადვილად ამოიხსნება მთელ ამოცანათა კლასი;

გარდა ამისა, დასმულია ამოცანა $\frac{p^q - 1}{p - 1}$ სახის გამო-

სახულების თვისებების შესწავლისა, სადაც p და q მარტივი რიცხვებია, შესწავლილია $a^2 + ab + b^2$ სახის გამოსახულების გარკვეული თვისებები და ა.შ.

ნაშრომში განხილულია შემდეგი საკითხები:

- დიდ ინტერესს იწვევს p და q მარტივ რიცხვთათვის $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის იმ მარტივ გამყოფთა რაოდენობის დადგენა, რომლებიც ნაკლებია p -ზე. ამ მიზნით განვიხილოთ თეორემები:

თეორემა 1. ვთქვათ, p და q კენტი მარტივი რიცხვებია და $p = 2q + 1$. მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის სათითაოდ აღებული განსხვავებული მარტივი გამყოფებიდან მხოლოდ ერთია p -ზე ნაკლები. A -ს აქვს მინიმუმ ორი განსხვავებული მარტივი გამყოფი მაინც;

თეორემა 2. ვთქვათ, p და q კენტი მარტივი რიცხვებია და $p < 2q + 1$. მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის ყველა

მარტივი გამყოფი მეტია p -ზე;

თეორემა 3. ვთქვათ, q კენტი მარტივი რიცხვია და $p \in N \setminus \{1\}$, $p \in [1; q] \cup [q + 2; 2q]$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის სათითაოდ აღებული განსხვავებული მარტივი გამყოფებიდან თითოეული მეტია p -ზე;

თეორემა 4. ვთქვათ, q კენტი მარტივი რიცხვია და

$$p \in \{q + 1; 2q + 1\}, \text{ მაშინ } A = \frac{p^q - 1}{p - 1} \text{ რიცხვის სათითაოდ აღებული განსხვავებული მარტივი გამყოფებიდან, მხოლოდ ერთია } p\text{-ზე ნაკლები. } A\text{-ს აქვს მინიმუმ ორი განსხვავებული მარტივი გამყოფი მაინც.}$$

ამოცანა 1. ამოვხსნათ განტოლება $2^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ ნატურალურ x, y, z რიცხვებში, ამასთან y უნდა იყოს მარტივი რიცხვი.

ამოცანა 2. ამოვხსნათ განტოლება $3^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ ნატურალურ x, y, z რიცხვებში, ამასთან y უნდა იყოს მარტივი რიცხვი.

ამოცანა 3. ამოვხსნათ განტოლება $p^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$, სადაც $p \in \{6; 7; 11; 13; \dots\}$ მარტივი რიცხვია $x, y \in N$ და y მარტივია.

მოყვანილია ლემა, რომლის მეშვეობითაც ადვილად ამოიხსნება ამოცანათა კლასი:

ლემა •. ვთქვათ $a, b, n \in N$ და $(a, b) = 1$. დავამტკიცოთ, რომ თუ $a^n \equiv 0 \pmod{|a - b|}$ ან $b^n \equiv 0 \pmod{|a - b|}$, მაშინ $|a - b| = 1$.

ამოვხსნათ განტოლებები (I - X) x, y ნატურალურ რიცხვებში:

$$\text{I. } \left(\frac{x+y}{2}\right)^z = x^z - y^z;$$

$$\text{VI. } (x+y)^{x-y} = x^y;$$

$$\text{II. } (x+y)^z = (2x)^z + y^z;$$

$$\text{VII. } (x+y)^{x-y} = y^x;$$

III. $(x + y)^z = (3x)^z + y^z$;

VIII. $(x + y)^y = (x - y)^x, (x > y)$;

IV. $(y - x)^{x+y} = x^y, (y > x)$;

IX. $(x - y)^{x+y} = x^{x-y}$;

V. $(y - x)^{x+y} = y^x, (y > x)$;

X. $(x + y)^{x-y} = (x - y)^x, (y > x)$.

ჩასმით მივიღებთ

$$(2q+1)^q - 1 = 2q^{t+1}. \quad (2)$$

ნიუტონის ბინომის ფორმულის გამოყენებით

(2)-დან

$$(2q)^q + C_q^1(2q)^{q-1} + \dots + C_q^{q-1} = 2q^{t+1}. \quad (3)$$

(3)-ის მარცხენა მხარე უნაშთოდ იყოფა $2q^2$ -ზე

და არ იყოფა $2q^3$ -ზე, ამიტომ $t+1 \leq 2 \Leftrightarrow t \leq 1$, ე.ი.

(2)-დან გვექნება

$$(2q+1)^q - 1 > (2q)^q > 2q^2 \geq 2q^{t+1}. \quad (4)$$

(4)-იდან გამომდინარე, A -ს (1) სახით წარმოდგენა შეუძლებელია.

თეორემა *. თუ $a, b \in N (a, b) = 1$, მაშინ

$(a^2 + ab + b^2)$ -ის ყოველ გამყოფს აქვს ასეთივე სახე.

ნაშრომში ასევე არის განხილული ჩვენი კვლევა ფიბონაჩის რიცხვებზე. შემოტანილია ფსევდოფიბონაჩის რიცხვების ცნება და ნაპოვნია მათი ზოგიერთი თვისება.

ძირითადი ნაწილი

თეორემა 1. ვთქვათ, p და q კენტი მარტივი

რიცხვებია და $p = 2q + 1$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის

სათითაოდ აღებული განსხვავებული მარტივი გამყოფებიდან მხოლოდ ერთია p -ზე ნაკლები. A -ს აქვს მინიმუმ ორი განსხვავებული გამყოფი მაინც.

დამტკიცება

თავდაპირველად განვიხილოთ განტოლება

$$A = q^t, \quad (1)$$

სადაც $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}, p = 2q + 1, t \in N$ და p, q კენტი

მარტივი რიცხვებია.

$$\begin{cases} p^{q-1} - 1 = (p-1)(1 + p + p^2 + \dots + p^{q-1}), \\ 1 + p + p^2 + \dots + p^{q-1} \equiv 0 \pmod{p_i} \\ p^m \equiv 1 \pmod{p_i}, m - \text{მაჩვენებელია} \\ q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^q \equiv 1 \pmod{p_i}, \\ p^m \equiv 1 \pmod{p_i} \\ m - \text{მაჩვენებელია} \\ q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} p - 1 = 2q \\ \left(\frac{p^q - 1}{p - 1}, p - 1 \right) = (p - 1, q) = (2q, q) = q \Rightarrow \\ A = 1 + p + p^q + \dots + p^{q-1} = \frac{p^q - 1}{p - 1} > p - 1 = 2q \\ \Rightarrow \begin{cases} A \equiv 0 \pmod{q}, \\ A > 2q. \end{cases} \end{cases} \quad (5)$$

(1) და (5)-დან გამომდინარე A -ს აქვს მინიმუმ ორი განსხვავებული მარტივი გამყოფი. ახლა ვთქვათ, $A = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, სადაც $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in N$, p_1, p_2, \dots, p_k განსხვავებული მარტივი რიცხვებია და $p_1 < p_2 < \dots < p_k$.

ვთქვათ, p ეკუთვნის m მაჩვენებელს p_i მოდულით, სადაც $p_i \neq q$ და $i = 1, 2, \dots, k$, მაშინ

$$\Rightarrow \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{m}, \\ q\text{-კენტი მარტივი რიცხვია} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=1, \\ m=q. \end{cases} \quad (6)$$

ვინაიდან $p_i \neq q$ კენტი მარტივი რიცხვებია და $p-1 = 2q \not\equiv 0 \pmod{p_i}$, ამიტომ $m \neq 1$, ე.ი. $m = q$.

p_i მოდულთან ურთიერთმარტივი p რიცხვის მაჩვენებელი უნდა ყოფდეს $\varphi(p_i) = p_i - 1$ -ს, ამიტომ

$$p_i - 1 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow q < \frac{p_i - 1}{2}, \text{ ე.ი. } q = p_1.$$

$$\begin{cases} q < \frac{p_i - 1}{2} \\ q = \frac{p - 1}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{p_i - 1}{2} > \frac{p - 1}{2} \Rightarrow p < p_i; i = 2, 3, \dots, k.$$

ე.ი. A -ს q -გან განსხვავებული ყველა მარტივი გამყოფი მეტია p -ზე. ამავე დროს q არის A -ს გამყოფი. ამიტომ საბოლოოდ გვაქვს:

$$q = p_1 < p < p_2 < p_3 < \dots < p_k. \text{ რ.დ.გ.}$$

თეორემა 2. ვთქვათ, p და q კენტი მარტივი რიცხვებია და $p < 2q + 1$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის ყველა

მარტივი გამყოფი მეტია p -ზე.

ვთქვათ, $A = \frac{p^q - 1}{p - 1} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, სადაც p_1, p_2, \dots, p_k განსხვავებული კენტი მარტივი რიცხვებია,

ამასთან $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ და $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in N$. ასევე, ვთქვათ, p ეკუთვნის m მაჩვენებელს p_i მოდულით $i = 1, 2, \dots, k$, მაშინ

$$\begin{cases} p^q - 1 = (p - 1)(1 + p + p^2 + \dots + p^{q-1}), \\ 1 + p + p^2 + \dots + p^{q-1} \equiv 0 \pmod{p_i} \\ p^m \equiv 1 \pmod{p_i}, m\text{-მაჩვენებელია} \\ q\text{-კენტი მარტივი რიცხვია} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^q \equiv 1 \pmod{p_i}, \\ p^m \equiv 1 \pmod{p_i} \\ m\text{-მაჩვენებელია} \\ q\text{-კენტი მარტივი რიცხვია} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{m}, \\ q\text{-კენტი მარტივი რიცხვია} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = q. \end{cases}$$

$$\begin{cases} p < 2q + 1, \\ p, q\text{-კენტი მარტივი რიცხვია} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p - 1 < 2q, \\ p, q\text{-კენტი მარტივი რიცხვია} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p - 1, q) = 1, \\ q > \frac{p - 1}{2}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{p^q - 1}{p - 1}, p - 1 \right) = (p - 1, q) = 1, \\ \frac{p^q - 1}{p - 1} \equiv 0 \pmod{p_i}. \end{cases} \Rightarrow p - 1 \not\equiv 0 \pmod{p_i} \Rightarrow p \not\equiv 1 \pmod{p_i} \Rightarrow m \neq 1. \text{ ე.ი. } m = q.$$

ვინაიდან p_i მოდულთან ურთიერთმარტივი p რიცხვის q მაჩვენებელი უნდა ყოფდეს $\varphi(p_i) = p_i - 1$ -ს,

ამიტომ $p_i - 1 \equiv 0 \pmod{q} \Rightarrow q < \frac{p_i - 1}{2}$.

მივიღებთ

$$\begin{cases} q > \frac{p - 1}{2}, \\ q < \frac{p_i - 1}{2}, \\ p_1 < p_2 < \dots < p_k. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{p - 1}{2} < \frac{p_i - 1}{2}, \\ p_1 < p_2 < \dots < p_k. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < p_i, \\ p_1 < p_2 < \dots < p_k. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p < p_1 < p_2 < \dots < p_k. \text{ რ.დ.გ.}$$

თეორემა 3. ვთქვათ, q კენტი მარტივი რიცხვია და $p \in N \setminus \{1\}$, $p \in]q; q] \cup [q + 2; 2q]$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$

რიცხვის სათითაოდ აღებული განსხვავებული მარტივი გამყოფებიდან თითოეული მეტია p -ზე.

დამტკიცება

ვთქვათ, $A = \frac{p^q - 1}{p - 1} = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$, სადაც p_1, p_2, \dots, p_k განსხვავებული კენტი მარტივი გამყოფებია.

ამასთან $p_1 < p_2 < \dots < p_k$ და $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in N$. ასევე, ვთქვათ, p ეკუთვნის m მაჩვენებელს p_1 მოდულით, მაშინ

$$\begin{cases} p^q - 1 = (p - 1)(1 + p + p^2 + \dots + p^{q-1}), \\ \frac{p^q - 1}{p - 1} \equiv 0 \pmod{p_1}, \\ p^m \equiv 1 \pmod{p_1}, m - \text{მაჩვენებელია,} \\ q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^q \equiv 1 \pmod{p_1}, \\ p^m \equiv 1 \pmod{p_1}, \\ m - \text{მაჩვენებელია,} \\ q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია.} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{m}, \\ q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1, \\ m = q. \end{cases}$$

ამოცანის პირობით გვაქვს:

$$\begin{cases} p \in N, \\ p \neq q + 1, p \neq 2q + 1 \\ q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \in N, \\ p - 1 \neq q, p - 1 \neq 2q, \\ q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია.} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (p-1, q) = 1, \\ q\text{-კენტი მარტივი რიცხვია.} \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{p^q - 1}{p-1}, p-1 \right) = (p-1, q) = 1, \\ \frac{p^q - 1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p_i}, \\ p_1\text{-კენტი მარტივი რიცხვია.} \end{array} \right. \Rightarrow p-1 \not\equiv 0 \pmod{p_1} \Rightarrow p \not\equiv 1 \pmod{p_1} \Rightarrow m \neq 1. \text{ ე.ი. } m = q.$$

ვინაიდან p_1 მოდულთან ურთიერთმარტივი p რიცხვის q მაჩვენებელი უნდა ყოფილიყო $\varphi(p_1) = p_1 - 1$ -ს, ამიტომ

$$\begin{cases} p_1 - 1 \equiv 0 \pmod{q}, \\ p_1, q\text{-კენტი მარტივი რიცხვია.} \end{cases} \Rightarrow q < \frac{p_1 - 1}{2}.$$

ე.ი. გვაქვს:

$$\begin{cases} q > \frac{p-1}{2}, \\ q < \frac{p_1-1}{2}, \\ p_1 < p_2 < \dots < p_k. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{p-1}{2} < \frac{p_1-1}{2}, \\ p_1 < p_2 < \dots < p_k. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p < p_1, \\ p_1 < p_2 < \dots < p_k. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p < p_1 < p_2 < \dots < p_k. \text{ რ.დ.გ.}$$

თეორემა 4. ვთქვათ, q კენტი მარტივი რიცხვია და $p \in \{q+1; 2q+1\}$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p-1}$ რიცხვის სათითაოდ

აღებული განსხვავებული მარტივი გამყოფებიდან, მხოლოდ ერთია p -ზე ნაკლები. A -ს აქვს მინიმუმ ორი განსხვავებული მარტივი გამყოფი მაინც.

დამტკიცება

თავდაპირველად განვიხილოთ განტოლება

$$A = q^t, \tag{1}$$

სადაც $A = \frac{p^q - 1}{p-1}$, $p = kq + 1$, $k \in \{1; 2\}$, $t \in \mathbb{N}$ და q კენტი მარტივი რიცხვია.

ჩასმით მივიღებთ

$$(kq+1)^q - 1 = kq^{t+1}, \quad k \in \{1; 2\}. \tag{2}$$

ნიუტონის ბინომის ფორმულით (2)-დან მივიღებთ

$$(kq)^q + C_q^1 (kq)^{q-1} + \dots + C_q^{q-1} (kq) = kq^{t+1}. \tag{3}$$

(3)-ის მარცხენა მხარე იყოფა kq^2 -ზე და არ იყოფა kq^3 -ზე, ამიტომ $t+1 \leq 2 \Rightarrow t \leq 1 \Rightarrow t+1$. ე.ი. გვექნება:

$$(kq+1)^q - 1 > (kq)^2 = kq^{t+1}. \quad (4)$$

(4)-იდან გამომდინარე A -ს (1) სახით წარმოდგენა შეუძლებელია.

$$\begin{cases} p-1 = kq, k \in \{1; 2\}, \\ \left(\frac{p^q-1}{p-1}, p-1\right) = (p-1, q) = (kq, q) = q, \Rightarrow \begin{cases} A \equiv 0 \pmod{q}, \\ A > kq. \end{cases} \\ A = \frac{p^q-1}{p-1} > p-1 = kq. \end{cases} \quad (5)$$

(5) სისტემიდან გამომდინარე A -ს აქვს მინიმუმ ორი განსხვავებული გამყოფი მაინც. ვთქვათ, $A = p_1^{\alpha_1}, p_2^{\alpha_2}, \dots, p_k^{\alpha_k}$, სადაც p_1, p_2, \dots, p_k განსხვავებული მარტივი რიცხვებია, ამასთან $p_1 < p_2 < \dots < p_k$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in N$. ასევე, ვთქვათ, p ეკუთვნის m მაჩვენებელს P_i მოდულით. აქ $P_i \neq q$, $i = 1, 2, \dots, k$ მაშინ გვექნება:

$$\begin{cases} p^q - 1 = (p-1)(1 + p + p^2 + \dots + p^{q-1}), \\ 1 + p + p^2 + \dots + p^{q-1} \equiv 0 \pmod{p_i}, \\ p^m \equiv 1 \pmod{p_i}, m - \text{მაჩვენებელია,} \\ q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია, } q \neq p_i. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p^q \equiv 1 \pmod{p_i}, \\ p^m \equiv 1 \pmod{p_i}, \\ m - \text{მაჩვენებელია,} \\ q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q \equiv 0 \pmod{m}, \\ q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია.} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 1, \\ m = q. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{p^q-1}{p-1} \equiv 0 \pmod{p_i}, \\ \left(\frac{p^q-1}{p-1}, p-1\right) = q, \Rightarrow p-1 \not\equiv 0 \pmod{p_i} \Rightarrow m \neq 1. \text{ ე.ი. } m = q. \\ p_i \neq q. \end{cases}$$

ვინაიდან p_i მოდულთან ურთიერთმარტივი p რიცხვის მაჩვენებელი უნდა ყოფდეს $\varphi(p_1) = p_1 - 1$ -ს, ამიტომ

$$\begin{cases} p_i - 1 \equiv 0 \pmod{q}, \\ p_i, q - \text{კენტი მარტივი რიცხვია.} \end{cases} \Rightarrow q < \frac{p_i - 1}{2}. \text{ ე.ი. } i \neq 1 \text{ და } q = p_1.$$

$$\begin{cases} q < \frac{p_i - 1}{2}, \\ q = \frac{p - 1}{k}, k \in \{1; 2\}, \end{cases} \Rightarrow \frac{p - 1}{2} < \frac{p_i - 1}{2} \Rightarrow p < p_i, i = 2, 3, \dots, k .$$

საბოლოოდ გვაქვს: $q = p_1 < p < p_2 < p_3 < \dots < p_k$. რ.დ.გ.

ამოცანა 1. ამოხსენით განტოლება $2^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ ნატურალურ რიცხვებში. ამასთან y უნდა იყოს მარტივი

რიცხვი.

ამოხსნა

განვიხილოთ განტოლება

$$2^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}, \quad (1)$$

სადაც y მარტივი რიცხვია და $x, z \in N$.

თუ $z = 1$, მაშინ (1)-დან $2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \notin N$;

თუ $z > 1$ და $y = 2$, მაშინ (1)-ის მარცხენა მხარე ლუწია, ხოლო მარჯვენა მხარე კენტი რიცხვია, ე.ი. y არის კენტი მარტივი რიცხვი;

თუ $z > 1$ კენტი რიცხვია და y კენტი მარტივი რიცხვია, მაშინ (1)-ის მარჯვენა მხარე კენტი რიცხვია, ხოლო მარცხენა – ლუწი, რაც შეუძლებელია;

თუ z შედგენილი რიცხვია, რომელსაც აქვს 1-ისაგან განსხვავებული კენტი გამყოფი, ე.ი. ვთქვათ $z = a \cdot b$, სადაც $a, b \in N$, $b > 1$ და b კენტია, მაშინ

$$2^x = \frac{(y^a)^b - 1}{y - 1} = \frac{y^a - 1}{y - 1} \cdot (1 + y^a + (y^a)^2 + \dots + (y^a)^{b-1}). \quad (2)$$

(2)-ის მარჯვენა მხარეს ფრჩხილში გვაქვს კენტი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამი, ე.ი. ეს მამრავლი კენტია და მარცხენა მხარეს გვაქვს 2^x . ეს კი შეუძლებელია. ამიტომ (1)-ს არ გააჩნია ამ შემთხვევაში ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში.

თუ $z = 2^n$, სადაც $n \in N \setminus \{1\}$, მაშინ (1) მიიღებს სახეს:

$$2^x = \frac{y^{2^n} - 1}{y - 1} = (y + 1)(y^2 + 1)(y^4 + 1) \dots (y^{2^{n-1}} + 1). \quad (3)$$

ამ შემთხვევაში (3)-ს აქვს მინიმუმ ორი თანამამრავლი: $(y + 1)$ და $(y^2 + 1)$. (1)-ს რომ ჰქონდეს ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში, ამისათვის $(y + 1)$ და $(y^2 + 1)$ -იც ერთდროულად უნდა წარმოადგენდეს 2-ის ნატურალურ ხარისხებს.

ე.ი.

$$\begin{cases} y+1=2^k, \\ y^2+1=2^l, \end{cases} \quad (4)$$

სადაც $k, l \in \mathbb{N}$, $k > 1$, $l > 1$.

(4)-ის პირველი განტოლებიდან y კენტი მარტივი რიცხვია, ამიტომ $(y^2 + 1)$ 4-ზე გაყოფისას ნაშთში მიიღება 2, (4)-ის მეორე განტოლების მარჯვენა მხარე (2^l) კი უნაშთოდ იყოფა 4-ზე. ე.ი. (1)-ს ამ შემთხვევაში არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში, დაგვრჩა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $z = 2$.

ამ შემთხვევაში

$$2^x = \frac{y^2 - 1}{y - 1} = y + 1 \Rightarrow y = 2^x - 1. \quad (5)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ მარტივი y -სათვის x აუცილებლად უნდა იყოს მარტივი, ე.ი. (1)-ს აქვს ამონახსნი მოცემულობით მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $x = P$ მარტივი რიცხვია და $y = P$ კი – მერსენას რიცხვი ანუ $P = 2^P - 1$ მარტივი რიცხვია, ხოლო z აუცილებლად 2-ის ტოლი უნდა იყოს.

აქედან გამომდინარე, ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ

$$2^n = \left(\frac{P_1^{\alpha_1} - 1}{P_1 - 1} \right) \cdot \left(\frac{P_2^{\alpha_2} - 1}{P_2 - 1} \right) \cdot \dots \cdot \left(\frac{P_k^{\alpha_k} - 1}{P_k - 1} \right),$$

სადაც P_1, P_2, \dots, P_k მარტივი რიცხვებია და $n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}$,

მაშინ

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_k = 2, P_1 = 2^{p_1} - 1, P_2 = 2^{p_2} - 1, \dots, P_k = 2^{p_k} - 1,$$

სადაც p_1, p_2, \dots, p_k მარტივი რიცხვებია, $p_1 + p_2 + \dots + p_k = n$, P_1, P_2, \dots, P_k – მერსენას რიცხვები.

ამოცანა 2. ამოხსენით $3^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ განტოლება ნატურალურ x, y, z რიცხვებში. ამასთან y მარტივი რიცხვი

უნდა იყოს.

ამოხსნა

განვიხილოთ განტოლება

$$3^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}, \quad (1)$$

სადაც y მარტივი რიცხვია და $x, z \in \mathbb{N}$.

თუ $z = 1$, მაშინ (1)-იდან $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0 \notin \mathbb{N}$.

ცხადია $y \neq 3$. ვთქვათ, y არის მარტივი რიცხვი. მაშინ ის გვექნება $6a - 1$ ან $6a + 1$ სახით, სადაც $a \in \mathbb{N}$.

თუ $y = 6a - 1$ და z კენტია, მაშინ (1)-ის მარჯვენა მხარე 3-ზე გაყოფისას ნაშთში მოგვცემს 1-ს, მარცხენა მხარე კი 3-ის ჯერადია, რაც შეუძლებელია.

თუ $y = 6a - 1$ და $z = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, მაშინ (1)-დან გვექნება:

$$\begin{aligned} 3^x &= \frac{(6a-1)^{2n} - 1}{(6a-1) - 1} = \frac{(6a-1)^2 - 1}{(6a-1) - 1} \cdot ((6a-1)^{2(n-1)} + (6a-1)^{2(n-2)} + \dots + 1) = \\ &= 6a((6a-1)^{2(n-1)} + (6a-1)^{2(n-2)} + \dots + 1), \end{aligned}$$

რაც შეუძლებელია, ვინაიდან ამ განტოლების მარცხენა მხარე 2-ზე არ იყოფა.

თუ $y = 6a + 1$ და z კენტია, მაშინ (1)-დან მივიღებთ, რომ z იყოფა 3-ზე, ე.ი. $z = 3q$, $q \in \mathbb{N}$. (1)-ში შეტანით გვექნება:

$$\begin{aligned} 3^x &= \frac{(y^3)^q - 1}{y^3 - 1} \cdot ((y^3)^{q-1} + (y^3)^{q-2} + \dots + 1) = 3(3(4a^2 + 2a) + 1)((y^3)^{q-1} + \dots + 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow 3^x \equiv 0 \pmod{3(4a^2 + 2a) + 1}, \end{aligned}$$

რაც შეუძლებელია.

თუ $y = 6a + 1$ და z ლუწია, ვთქვათ $z = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, მაშინ (1)-დან გვექნება:

$$\begin{aligned} 3^x &= \frac{(6a+1)^{2n} - 1}{(6a+1) - 1} \cdot ((6a+1)^{2(n-1)} + (6a+1)^{2(n-2)} + \dots + 1) = \\ &= 2(3a+1)((6a+1)^{2(n-1)} + \dots + 1) \Rightarrow 3^x \equiv 0 \pmod{2}, \end{aligned}$$

რაც შეუძლებელია;

დაგვრჩა განვიხილოთ შემთხვევა $y = 2$. ამ შემთხვევაში (1)-დან მივიღებთ

$$3^x = 2^z - 1. \quad (2)$$

ვთქვათ, $x > 1$.

თუ x კენტია, მაშინ (2)-დან გვექნება:

$$2^z = 3^x + 1 = (3+1)(3^{x-1} - 3^{x-2} + \dots + 1). \quad (3)$$

(3)-ის მარჯვენა მხარეს მეორე ფრჩხილში გვაქვს კენტი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამი, ე.ი. კენტი რიცხვი, ამიტომ (3)-ს არ გააჩნია ნატურალურ რიცხვებში ამონახსნი.

თუ $x = 2n$, $n \in \mathbb{N}$, მაშინ (2)-იდან მივიღებთ:

$$2^z = 3^{2n} + 1 = (4-1)^{2n} + 1 = 4k + 2, \quad (4)$$

სადაც $k \in \mathbb{N}$.

(4)-ის მარჯვენა მხარე 4-ზე გაყოფისას ნაშთში იძლევა 2-ს, ხოლო მარცხენა მხარე იყოფა 4-ზე, ამიტომ არც ამ შემთხვევაში ექნება (2)-ს ამონახსნი:

განვიხილოთ შემთხვევა $x = 1$ -სათვის, მაშინ

$$3^1 = \frac{y^z - 1}{y - 1}. \quad (5)$$

ცხადია, რომ (5)-ს აქვს ერთადერთი ამონახსნი $y = z = 2$. საბოლოოდ მივიღეთ, რომ (1)-ის ამონახსნი მოცემული პირობებით არის: $x = 1$; $y = z = 2$.

ამოცანა 3. ამოხსენით განტოლება

$$P^x = \frac{y^z - 1}{y - 1},$$

სადაც $P \in \{5; 7; 11; \dots\}$ მარტივი რიცხვია $x, z \in N$ და y მარტივია.

ამოხსნა

განვიხილოთ განტოლება

$$P^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}, \quad (1)$$

სადაც $P \in \{5; 7; 11; \dots\}$ მარტივი რიცხვია, y მარტივია და $x, z \in N$.

ჯერ ვაჩვენოთ, რომ $(y^n - 1)$ თუ იყოფა $(y^m - 1)$ -ზე, სადაც $y \neq 1$ და $m, n \in N$, მაშინ აუცილებლად n გაიყოფა m -ზე.

დამტკიცება

ვთქვათ, $n = am + r$, სადაც $m, n, a, z \in N$ და $0 \leq r < m$. მაშინ

$$y^n - 1 = y^{am} \cdot y^r - 1 = y^r (y^{am} - 1) + (y^r - 1) = y^r (y^m - 1)(y^{m(a-1)} + \dots + 1) + (y^r - 1). \quad (2)$$

ამოცანის პირობა რომ შესრულდეს, საჭიროა $(y^r - 1)$ გაიყოს $(y^m - 1)$ -ზე, მაგრამ ეს შესაძლებელია, როცა $r = 0$ და მაშინ $n = am$, სადაც $a, m \in N$, ე.ი. საბოლოოდ $n \equiv 0 \pmod{m}$. რ.დ.გ.

დამტკიცებულიდან და იმის გათვალისწინებით, რომ p მარტივი რიცხვია, ადვილი საჩვენებელია, რომ (1) -ს აქვს ამონახსნი მოცემული პირობით, თუ z მარტივი რიცხვია ან $z = 2^n$, სადაც $n \in N$.

თუ $z = 2^n$, $n \in N$, მაშინ (1) მიიღებს სახეს:

$$P^x = \frac{y^{2^n} - 1}{y - 1}. \quad (3)$$

$n = 1$ -სათვის $P^x = \frac{y^2 - 1}{y - 1} = y + 1 \Rightarrow y = P^x - 1$. თუ გავითვალისწინებთ, რომ y და p მარტივი რიცხვებია,

მაშინ $p = 2$ და $x = P_1$, სადაც P_1 მარტივი რიცხვია და $y = 2^{P_1} - 1$ – მერსენას რიცხვია.

თუ $n > 1$, მაშინ (1) მიიღებს სახეს:

$$P^x = \frac{y^{2^n} - 1}{y - 1} = (1 + y)(1 + y^2) \cdot \dots \cdot (1 + y^{2^{n-1}}). \quad (4)$$

(4)-ს მარჯვენა მხარეს არის მინიმუმ ორი თანამამრავლი: $(y+1)$ და (y^2+1) . (4)-ს რომ ჰქონდეს ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში, ამისათვის $(y+1)$ და (y^2+1) -იც ერთდროულად უნდა წარმოადგენდეს p -ს რაიმე ნატურალურ ხარისხს, ე.ი.

$$\begin{cases} y+1 = p^a, \\ y^2+1 = p^b \end{cases} \Rightarrow P^b = (y+1)^2 - 2y = P^{2a} - 2y. \quad (5)$$

ვინაიდან $(p, y) = 1$, ამიტომ (5)-დან გამომდინარე $P \equiv 0 \pmod{2}$. მაგრამ p მარტივი რიცხვია, ამიტომ $p = 2$ და (5) ასე ჩაიწერება:

$$2^b = 2^{2a} - 2y \Rightarrow y = 2^{b-1}(2^{2a-b} - 1). \quad (6)$$

y მარტივი რიცხვია, ამიტომ (6)-დან გვექნება: $b=1$, $2a-1 = P_1$ მარტივი რიცხვია და $y = 2^{P_1} - 1$ – მერსენას რიცხვი.

შეენიშნოთ, რომ

$$y < P^{\frac{x}{z}} < y+1, \quad (7)$$

ამიტომ, თუ $\frac{x}{z} \in N$, მაშინ (1)-ს არ ექნება ამონახსნი.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როცა z მარტივი რიცხვია.

ე.ი. გვექნება

$$P^x = \frac{y^z - 1}{y - 1},$$

სადაც $x \in N$ და p, z, y მარტივი რიცხვებია.

მივიღებთ

$$\begin{cases} \left(\frac{y^z - 1}{y - 1}, y - 1 \right) = (y - 1, z), \\ y, z, p - \text{მარტივი რიცხვებია, } \Rightarrow p - 1 \equiv 0 \pmod{z} \Rightarrow P \equiv 1 \pmod{z} \Rightarrow p = 2kz + 1, \\ \frac{y^z - 1}{y - 1} \equiv 0 \pmod{P}, \end{cases}$$

სადაც p, z მარტივი რიცხვებია და $k \in N$.

განვიხილოთ რამდენიმე შემთხვევა:

1) თუ $P = 5 = 2 \cdot 2 + 1$, ე.ი. $z = 2$, მაშინ (1)-დან გვექნება:

$$5^x = \frac{y^2-1}{y-1} = y+1 \Rightarrow y = 5^x - 1 \equiv 0 \pmod{4}.$$

ეს კი შეუძლებელია, ვინაიდან y მარტივი რიცხვია.

2 თუ $P = 7 = 2 \cdot 3 + 1$, ე.ი. $z = 3$. მაშინ (1)-დან გვექნება:

$$7^x = \frac{y^3-1}{y-1} = y^2 + y + 1. \quad (8)$$

განვიხილოთ იგივეობები:

$$(a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2) = (ac - bd)^2 + (ac - bd)(ad + bc + bd) + (ad + bc + bd)^2 = (ad - bc)^2 (ad - bc)(ac + bd + bc) + (ac + bd + bc)^2; \quad (9)$$

$$(a^2 + ab + b^2)^2 = (a^2 - b^2) + (b^2 + 2ab)(a^2 - b^2) + (b^2 + 2ab)^2 = (b^2 - a^2)^2 + (b^2 - a^2)(a^2 + 2ab) + (a^2 + 2ab)^2; \quad (10)$$

$$(a^2 + ab + b^2)^3 = (a^3 - 3b^2a - b^3)^2 + (a^3 - 3b^2a - b^3)(3ab(a+b)) + (3ab(a+b))^2. \quad (11)$$

$$7^2 = 1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2.$$

ამ ფორმულებით გვექნება:

$$(1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2)^2 = 3^2 + 3 \cdot 5 + 5^2, \quad (1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2)^3 = 1^2 + 1 \cdot 18 + 18^2.$$

$$(1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2)^4 = (1^2 + 1 \cdot 18 + 18^2)(1^2 + 1 \cdot 2 + 2^2) = 7^2 + 7 \cdot 126 + 126^2.$$

ადვილი შესამჩნევია, რომ ხარისხ 3-ის შემდეგ 7-ის ნებისმიერი ხარისხი წარმოდგება ორი რიცხვის ჯამის არასრული კვადრატის სახით, რომლიდანაც ერთი რიცხვი აუცილებლად ლუწია და 2-ზე მეტი, ამიტომ, ცხადია, 7-ის ვერც ერთი ხარისხი, გარდა $x = 1$ -ისა, ვერ დააკმაყოფილებს (8) განტოლებას.

ე.ი. (1)-ის ამონახსნებია: $x = 1$; $y = 2$; $z = 3$.

ამოცანა 1. ამოხსენით განტოლება:

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^z = x^z - y^z \quad (1)$$

ნატურალურ რიცხვებში.

ამოხსნა

(1) გადავწეროთ ასე:

$$(x+y)^z = 2^z(x^z - y^z). \quad (2)$$

$z = 1$ -სათვის (2)-დან მივიღებთ $x+y = 2x-2y \Leftrightarrow x = 3y$, ე.ი. (1)-ის ამონახსნებია: $x = 3t$, $y = t$, სადაც $t \in N$;

$z > 1$ -სათვის, ვთქვათ, (2)-ის ამოხსნებია: x_0, y_0, z_1 და $x_0 = x_1 d, y_0 = y_1 d$, სადაც $d = (x_0, y_0)$.

(2)-ში ჩასმით და ორი მხარის d^{z_1} -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$(x_1 + y_1)^{z_1} = 2^{z_1} (x_1^{z_1} - y_1^{z_1}). \quad (3)$$

(3)-ის მარჯვენა მხარე 2-ის ჯერადია. ამიტომ x_1 და y_1 რიცხვები კენტია.

ე.ი.

$$x_1 = 2a - 1 \text{ და } y_1 = 2b - 1, \text{ სადაც } a, b \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

(4)-ის (3)-ში ჩასმით და გამარტივებით მივიღებთ

$$(a + b - 1)^{z_1} = (2a - 1)^{z_1} - (2b - 1)^{z_1}. \quad (5)$$

$$\begin{aligned} (2a - 1)^{z_1} - (2b - 1)^{z_1} &= ((2a - 1) - (2b - 1))(2a - 1)^{z_1 - 1} + \dots + (2b - 1)^{z_1 - 1} = \\ &= 2(a - b)((2a - 1)^{z_1 - 1} + \dots + (2b - 1)^{z_1 - 1}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} (2b - 1)^{z_1} &= (2a - 1)^{z_1} - (a + b - 1)^{z_1} = ((2a - 1) - (a + b - 1))((2a - 1)^{z_1 - 1} + \dots \\ &\dots + (a + b - 1)^{z_1 - 1}) = (a - b)((2a - 1)^{z_1 - 1} + \dots + (a + b - 1)^{z_1 - 1}). \end{aligned} \quad (7)$$

(5), (6) და (7)-დან გვაქვს, რომ $(a - b) \setminus (2a - 1)^{z_1}$ და $(a - b) \setminus (2b - 1)^{z_1}$, მაგრამ $((2a - 1), (2b - 1)) = 1$, ამიტომ

ლემის • თანახმად $a - b = 1$ ანუ $a = b + 1$. (5)-ში ჩასმით

$$(2b)^{z_1} = (2b + 1)^{z_1} - (2b - 1)^{z_1} \Leftrightarrow (2b - 1)^{z_1} + (2b)^{z_1} = (2b + 1)^{z_1}. \quad (8)$$

თუ $z_1 = 1$, მაშინ (8)-დან

$$\begin{aligned} (2b)^{z_1} &= ((2b + 1) - (2b - 1))((2b + 1)^{z_1 - 1} + \dots + (2b - 1)^{z_1 - 1}) = \\ &= 2((2b + 1)^{z_1 - 1} + \dots + (2b - 1)^{z_1 - 1}) \Rightarrow 2^{z_1 - 1} \cdot b^{z_1} = (2b + 1)^{z_1 - 1} + \dots + (2b - 1)^{z_1 - 1}. \end{aligned} \quad (9)$$

თუ $z_1 > 1$ არის კენტი ნატურალური რიცხვი, მაშინ (9)-ის მარჯვენა მხარე არის კენტი როდენობის კენტი რიცხვების ჯამი ანუ კენტი რიცხვია, ხოლო მარცხენა მხარე ლუწია, ამიტომ 1-საგან განსხვავებული კენტი z_1 -ებისათვის მოცემულ განტოლებას არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ x, y, z რიცხვებში.

თუ z_1 ლუწია, ე.ი. $z_1 = 2t$, მაშინ (8) მიიღებს სახეს:

$$(2b - 1)^{2t} + (2b)^{2t} = (2b + 1)^{2t}. \quad (10)$$

თუ $t = 1$, მაშინ $(2b - 1)^2 + (2b)^2 = (2b + 1)^2$, საიდანაც $z_1 = b = 2$.

ე.ი. (3)-ის ამონახსნებია:

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ y_1 = 1, \\ z_1 = 1. \end{cases} \text{ ან } \begin{cases} x_1 = 5, \\ y_1 = 3, \\ z_1 = 2. \end{cases}$$

აქედან (1)-ის ამონახსნები იქნება:

$$\begin{cases} x = 3k, \\ y = k, \\ z = 1. \end{cases} \text{ ან } \begin{cases} x = 5k, \\ y = 3k, \\ z = 2, \end{cases} \quad (11)$$

სადაც $k \in N$.

თუ $t > 1$, მაშინ ნიუტონის ბინომის ფორმულით (10)-დან ადვილი დასაწახია, რომ $b \nmid t$.

(10)-ის ორივე მხარის $(2b)^{2t}$ -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$2 > \left(1 - \frac{1}{2b}\right)^{2t} + 1 = \left(1 + \frac{1}{2b}\right)^{2t} > 1 + C_{2t}^1 \left(\frac{1}{2b}\right) = 1 + \frac{2t}{2b} = 1 + \frac{t}{b} \Rightarrow 1 > \frac{t}{b} \Rightarrow t < b,$$

მაგრამ $b \nmid t$, რაც შეუძლებელია.

საბოლოოდ გვაქვს, რომ (1)-ის ყველა ამონახსნს იძლევა (11).

ამოცანა II. ამოხსენით განტოლება

$$(x + y)^z = (2x)^z + y^z \quad (1)$$

ნატურალურ რიცხვებში.

ამოხსნა

ვთქვათ, $z > 2$ და (1)-ის ამონახსნები: $x_0, y_0, z_1 \in N, z_1 > 2$. ამასთან $x_0 = x_1 d, y_0 = y_1 d$, სადაც $d = (x_0; y_0)$. (1)-ის ორივე მხარის d^{z_1} -ზე გაყოფით მივიღებთ

$$\begin{aligned} (x_1 + y_1)^{z_1} &= (2x_1)^{z_1} + y_1^{z_1} \Leftrightarrow y_1^{z_1} = (x_1 + y_1)^{z_1} - (2x_1)^{z_1} = \\ &= ((x_1 + y_1) - 2x_1) \left((x_1 + y_1)^{z_1-1} + (x_1 + y_1)^{z_1-2} (2x_1) + \dots + (2x_1)^{z_1-1} \right) = \\ &= (y_1 - x_1) \left((x_1 + y_1)^{z_1-1} + (x_1 + y_1)^{z_1-2} \cdot (2x_1) + \dots + (2x_1)^{z_1-2} \right) \Rightarrow (y_1 - x_1) \mid y_1^{z_1}, \end{aligned}$$

ამასთან, $(x_1, y_1) = 1$. ამიტომ, ლემის • თანახმად $y_1 - x_1 = 1$ ანუ $y_1 = x_1 + 1$.

(1)-ში ჩასმით გვექნება:

$$(2x_1 + 1)^{z_1} = (2x_1)^{z_1} + (x_1 + 1)^{z_1}. \quad (2)$$

(2)-ის მარცხენა მხარე კენტია, ამიტომ $(x_1 + 1)$ უნდა იყოს კენტი, ე.ი. $x_1 = 2k, k \in N$. (2)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$(4k + 1)^{z_1} = (4k)^{z_1} + (2k + 1)^{z_1}. \quad (3)$$

თუ z_1 კენტია, მაშინ (3)-იდან

$$\begin{aligned} (4k + 1)^{z_1} &= (4k + (2k + 1)) \left((4k)^{z_1-1} - (4k)^{z_1-2} (2k + 1) + \dots + (2k + 1)^{z_1-1} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (6k + 1) \mid (4k + 1)^{z_1}, \end{aligned}$$

მაგრამ $(6k+1; 4k+1)=1$ (მართლაც $6k+1=(4k+1)+2k$), ე.ი. z_1 ლუწია ან $z_1 = 2n$, სადაც $n \in N$, $n \neq 1$.

ამის გათვალისწინებით (3) მიიღებს სახეს:

$$\left((4k+1)^n\right)^2 = \left((4k)^n\right)^2 + \left((2k+1)^n\right)^2. \quad (4)$$

$(4k+1)$, $4k$ და $(2k+1)$ წყვილ-წყვილად ურთიერთმარტივი რიცხვებია. ამიტომ მოიძებნება $p, q \in N$, $p > q$ და $(p, q) = 1$, რომ

$$(4k+1)^n = p^2 + q^2, \quad (4k)^n = 2pq, \quad (2k+1)^n = p^2 - q^2. \quad (5)$$

(5)-დან გვაქვს:

$$\begin{aligned} 2q^2 &= (p^2 + q^2) - (p^2 - q^2) = (4k+1)^n - (2k+1)^n = \\ &= ((4k+1) - (2k+1)) \left((4k+1)^{n-1} + \dots + (2k+1)^{n-1} \right) = 2k \left((4k+1)^{n-1} + \dots + (2k+1)^{n-1} \right) \Rightarrow k \setminus q^2. \end{aligned} \quad (6)$$

ვინაიდან $(p, q) = 1$ და $k \setminus q^2$, ამიტომ $(k, p) = 1$.

$$(4k)^n = 2pq \Rightarrow 2^{2n-1} k^n = pq. \quad (7)$$

თუ $k = 1$, მაშინ (3) მიიღებს სახეს:

$$5^{z_1} = 4^{z_1} + 3^{z_1} \text{ ანუ}$$

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{5}\right)^{z_1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{z_1} = 1, \\ z_1 < 2 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{z_1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{z_1} > \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1, \\ z_1 = 2 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{z_1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{z_1} = \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1 \\ z_1 > 2 \Rightarrow \left(\frac{4}{5}\right)^{z_1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{z_1} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1. \end{cases} \Rightarrow z_1 = 2 \quad (8)$$

თუ $k > 1$, მაშინ (6) და (7)-დან k კენტი და $p = 2^{2n-1}$, $q = k^2$. (5)-დან მივიღებთ

$$(4k+1)^n = (2^{2n-1})^2 + (k^2)^2.$$

საიდანაც

$$2^{4n-2} = (4k+1)^n - (k^2)^n = (4k+1-k^2) \left((4k+1)^{n-1} + (4k+1)^{n-2} k^2 + \dots + (k^2)^{n-1} \right). \quad (9)$$

(9)-დან გამომდინარე $4k+1-k^2 \geq 1 \Leftrightarrow k \in]0; 4[$. ამასთან, k 1-ისაგან განსხვავებული კენტი რიცხვია, ე.ი.

$k = 3$. (4)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$13^{2n} = 12^{2n} + 7^{2n}. \quad (10)$$

თუ $n = 1$, მაშინ $13^{2n} = 13^2 \neq 12^2 + 7^2 = 12^{2n} + 7^{2n}$.

თუ $n > 1$, მაშინ (1)-დან გვაქვს

$$12^{2n} = (13^2)^n - (7^2)^n = 169^n - 49^n = (169 - 49)(169^{n-1} + 169^{n-2} \cdot 49 + \dots + 49^{n-1}) = 120(169^{n-1} + \dots + 49^{n-1}). \quad (11)$$

(11)-ის მარჯვენა მხარე 5-ის ჯერადია, ხოლო მარცხენა – არა, ამიტომ (11)-ს არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში.

საბოლოოდ გვაქვს, რომ თუ $z > 2$, მაშინ (1)-ს არ გააჩნია ნატურალურ რიცხვებში ამონახსნი.

თუ $z = 1$, მაშინ (1)-დან მივიღებთ $x + y = 2x + y \Leftrightarrow x = 0$, რაც შეუძლებელია, ვინაიდან $x \in N$.

თუ $z = 2$, მაშინ

$$(x + y)^2 = (2x)^2 + y^2 \Leftrightarrow 3x = 2y, \quad (12)$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ (1)-ის ყველა ნატურალური ამონახსნია:

$$x = 2t, \quad y = 3t, \quad z = 2,$$

სადაც $t \in N$.

ამოცანა III. ამოხსენით განტოლება

$$(x + y)^z = (3x)^z + y^z, \quad (1)$$

ნატურალურ რიცხვებში.

ამოხსნა

ვთქვათ, (1)-ის ამონახსნებია:

$$x_1, y_1, z_0 \in N \text{ და } (x_1, y_1) = d, \quad x_1 = x_0 d, \quad y_1 = y_0 d. \quad (2)$$

(2)-ის (1)-ში ჩასმით და გამარტივებით მივიღებთ

$$(x_0 + y_0)^{z_0} = (3x_0)^{z_0} + y_0^{z_0}. \quad (3)$$

(3)-დან, თუ $z_0 > 1$, გვექნება:

$$y_0^{z_0} = (y_0 - 2x_0) \left((x_0 + y_0)^{z_0-1} + \dots + (3x_0)^{z_0-1} \right). \quad (4)$$

საიდანაც

$$y_0^{z_0} \equiv (\text{mod}(y_0 - 2x_0)). \quad (5)$$

თუ y_0 კენტია, მაშინ **ლემის** • თანახმად (5)-დან გვაქვს:

$$y_0 - 2x_0 = 1 \text{ ანუ } y_0 = 2x_0 + 1. \quad (6)$$

(6)-ის (3)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$(3x_0 + 1)^{z_0} = (3x_0)^{z_0} + (2x_0 + 1)^{z_0}. \quad (7)$$

თუ z_0 კენტია, მაშინ (7)-დან გვექნება:

$$(3x_0 + 1)^{z_0} = (5x_0 + 1) \left((3x_0)^{z_0-1} - \dots + (2x_0 + 1)^{z_0-1} \right), \quad (8)$$

$$\begin{aligned} 5x_0 + 1 &= \left((3x_0 + 1)^{z_0}, 5x_0 + 1 \right) = \left((5x_0 + 1 - 2x_0)^{z_0}, 5x_0 + 1 \right) = \\ &= \left((2x_0)^{z_0}, 5x_0 + 1 \right) = (2^{z_0}, 5x_0 + 1). \end{aligned} \quad (9)$$

ე.ი. თუ z_0 კენტია ($z_0 \neq 1$), მაშინ (7)-ს რომ ჰქონდეს ამონახსნი, x_0 -იც უნდა იყოს კენტი. (8) და (9)-დან გამომდინარე, $5x_0 + 1 = 2^{z_0}$, ვინაიდან (8)-ის მარჯვენა მხარის მეორე ფრჩხილში გვაქვს კენტი რაოდენობის კენტი რიცხვების ჯამი ანუ კენტი რიცხვი. ამასთან $(3x_0 + 1)^{z_0} = (3(2k + 1) + 1)^{z_0} = 2^{z_0} (3k + 2)^{z_0}$ და მარჯვენა მხარეს ლუწი არის მხოლოდ $(5x_0 + 1)$ მამრავლი, ე.ი.

$$5x_0 = 2^{z_0} - 1. \quad (10)$$

კენტი z_0 -ებისათვის (10)-ის მარჯვენა მხარე ბოლოვდება 1-ით ან 7-ით, ამიტომ (10) ვერ შესრულდება კენტი x_0 და z_0 -სათვის, ე.ი. z_0 ლუწია.

ვინაიდან $(a^n)^4 + (b^n)^4 = (c^n)^4$ განტოლებას არა აქვს ამონახსნი $a, b, c, n \in N$ -ში (ეს ცნობილი ფაქტი მტკიცდება უსასრულოს დაშვების მეთოდით), ამიტომ ლუწ z_0 -ს უნდა ჰქონდეს სახე:

$$z_0 = 4(n-1) + 2, \quad n \in N. \quad (11)$$

(7) და (11)-დან გვექნება

$$(9x_0^2 + 6x_0 + 1)^{2n-1} = (9x_0^2)^{2n-1} + (4x_0^2 + 4x_0 + 1)^{2n-1}. \quad (12)$$

თუ $n > 1$, $n \in N$, მაშინ (12)-დან გვექნება:

$$(6x_0 + 1) \left((9x_0^2 + 6x_0 + 1)^{2n-2} + (9x_0^2 + 6x_0 + 1)^{2n-3} \cdot (9x_0^2) + \dots + (9x_0^2)^{2n-2} \right) = (2x_0 + 1)^{4n-2}. \quad (13)$$

ვინაიდან $(6x_0 + 1, 2x_0 + 1) = (6x_0 + 1, 6x_0 + 2) = (2, 6x_0 + 3) = 1$, ამიტომ (13)-ს არ გააჩნია ამონახსნი ზემოთ ხსენებული პირობებით.

თუ $z_0 = 1$, მაშინ (3)-დან

$$(x_0 + y_0) = (3x_0) + y_0 \Rightarrow x_0 = 0 \notin N.$$

თუ $z_0 = 2$, მაშინ (7)-დან

$$(3x_0 + 1)^2 = (3x_0)^2 + (2x_0 + 1)^2 \Leftrightarrow 9x_0^2 + 6x_0 + 1 = 9x_0^2 + 4x_0^2 + x_0 + 1 \Leftrightarrow x_0 = 0 \notin N.$$

საბოლოოდ გვაქვს, რომ (1)-ს ამ პირობით არ გააჩნია ამონახსნი.

ამოცანა IV. ამოხსენით განტოლება

$$(y-x)^{x+y} = x^y, \quad (y > x) \quad 1)$$

ნატურალურ რიცხვებში.

ამოხსნა

ვთქვათ, მოცემული განტოლების ამონახსნებია: x_0, y_0 და ამასთან $x_0 = x_1 d, y_0 = y_1 d$, სადაც $d = (x_0, y_0)$.
მოცემულ განტოლებაში ჩასმით მივიღებთ

$$d^{x_1 d} (y_1 - x_1)^{x_1 d} = \left(\frac{x_1}{y_1 - x_1} \right)^{y_1 d}. \quad (2)$$

აქედან

$$d^{x_1} (y_1 - x_1)^{x_1} = \left(\frac{x_1}{y_1 - x_1} \right)^{y_1}. \quad (3)$$

(3)-დან $(y_1 - x_1) \mid x_1$. **ლემის •** თანახმად

$$y_1 - x_1 = 1 \Rightarrow y_1 = x_1 + 1. \quad (4)$$

(4)-ის (3)-ში ჩასმით და გამარტივებით მივიღებთ $d^{x_1} = x_1^{x_1+1}$ ანუ

$$d = x_1 \cdot x_1^{\frac{1}{x_1}}. \quad (5)$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ $n^{\frac{1}{n}}$ რაციონალური რიცხვია, მაშინ ის აუცილებლად ნატურალური უნდა იყოს.

ახლა, ვთქვათ

$$k, n \in \mathbb{N}, n \neq 1 \text{ და } n^{\frac{1}{n}} = k. \quad (6)$$

(6)-დან $n = k^n \geq 2^n$. მაგრამ ეს უკანასკნელი მცდარია. ე.ი. $x_1^{\frac{1}{x_1}}$ ირაციონალურია, თუ $x_1 \in \mathbb{N}, x_1 \neq 1$.

$x_1 = 1$ -სათვის ვღებულობთ, რომ (3)-ს აქვს ერთადერთი წყვილი ამონახსენი:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}, \text{ ამიტომ (1)-ის ამონახსნებია: } x_0 = d, y_0 = 2d, \text{ სადაც } d \in \mathbb{N}.$$

ამოცანა V. ამოხსენით განტოლება.

$$(y-x)^{x+y} = y^x \quad (y > x) \quad (1)$$

ნატურალურ რიცხვებში.

ამოხსნა

ვთქვათ, (1)-ის ამონახსნებია: x_0, y_0 და ამასთან

$$x_0 = x_1 d, y_0 = y_1 d, \quad (2)$$

სადაც $d_0 = (x_0, y_0)$.

(2)-ის (1)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$d^{x_1 d + y_1 d} (y_1 - x_1)^{x_1 d + y_1 d} = d^{x_1 d} \cdot y_1^{x_1 d}. \quad (3)$$

(3)-დან გვაქვს:

$$d^{y_1} (y_1 - x_1)^{x_1} = \left(\frac{y_1}{y_1 - x_1} \right)^{x_1}. \quad (4)$$

(4)-ის მარცხენა მხარე ნატურალური რიცხვია, ამიტომ **ლემის •** თანახმად

$$y_1 - x_1 = 1, \text{ საიდანაც } y_1 = x_1 + 1. \quad (5)$$

(5)-ის (4)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$d^{x_1+1} = (x_1 + 1)^{x_1} \Rightarrow d = \left(\frac{x_1 + 1}{d} \right)^{x_1}. \quad (6)$$

(6)-ს რომ ჰქონდეს ამონახსნი, უნდა მოვიპოვოთ $k \in N \setminus \{1\}$, რომლისთვისაც $x_1 + 1 = kd$. (6)-ის გათვალისწინებით მივიღებთ

$$d = k^{kd-1}. \quad (7)$$

ვინაიდან ყოველი $n \in N$ -სათვის $n < 2^{2^{n-1}}$, ამიტომ (6)-ს არ გააჩნია ამონახსნი და, აქედან გამომდინარე, არც (1)-ს ექნება ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში.

ამოცანა VI. ამოხსენით განტოლება

$$(x + y)^{x-y} = x^y \quad (1)$$

ნატურალურ რიცხვებში.

ამოხსნა

ვთქვათ, (1)-ის ამონახსნებია: x_0, y_0 და ამასთან

$$x_0 = x_1 d, \quad y_0 = y_1 d, \quad (2)$$

სადაც $d = (x_0, y_0)$.

(2)-ის (1)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$d^{(x_1 - y_1)d} (x_1 + y_1)^{(x_1 - y_1)d} = x_1^{y_1 d} d^{y_1 d}. \quad (3)$$

(3)-დან

$$\frac{(x_1 + y_1)^{x_1 - y_1}}{x_1^{y_1}} = d^{2y_1 - x_1}. \quad (4)$$

ვთქვათ, $x_1 \neq 1$, მაშინ

$$(x_1, y_1) = 1 \Rightarrow (x_1 + y_1, x_1) = 1 \Rightarrow ((x_1 + y_1)^{x_1 - y_1}, x_1^{y_1}) = 1. \quad (5)$$

(4)-ის მარჯვენა მხარე ან მისი შებრუნებული ნატურალური რიცხვია. (5)-დან გამომდინარე, (4)-ის არც მარცხენა მხარე და არც მისი შებრუნებული სიდიდე არ შეიძლება იყოს ნატურალური რიცხვი, ე.ი. $x_1 \neq 1$ - სათვის (4)-ს არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში.

თუ $x_1 = 1$, მაშინ (4)-დან მარტივად მიიღება $x_1 = y_1 = d = 1$.

ე.ი. (1)-ს აქვს ერთადერთი ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში: $x_0 = y_0 = 1$.

ამოცანა VII. ამოხსენით განტოლება

$$(x + y)^{z-y} = y^x \quad (1)$$

ნატურალურ რიცხვებში.

ამოხსნა

ვთქვათ, (1)-ის ამონახსნებია: x_0, y_0 და ამასთან

$$x_0 = x_1 d, \quad y_0 = y_1 d, \quad (2)$$

სადაც $d = (x_0, y_0)$.

(2)-ის (1)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$d^{(x_1-y_1)d} (x_1 + y_1)^{(x_1-y_1)d} = y_1^{x_1 d} d^{x_1 d}, \quad (3)$$

საიდანაც

$$d^{x_1-y_1} (x_1 + y_1)^{x_1-y_1} = y_1^{x_1} d^{x_1}. \quad (4)$$

(4)-დან

$$d^{y_1} = \frac{(x_1 + y_1)^{x_1-y_1}}{y_1^{x_1}}. \quad (5)$$

$$(x_1, y_1) = 1 \Rightarrow (x_1 + y_1, y_1) = 1 \Rightarrow \left((x_1 + y_1)^{x_1-y_1}, y_1^{y_1} \right) = 1. \quad (6)$$

(5)-ის მარცხენა მხარე ნატურალური რიცხვია, მარჯვენა მხარეც რომ იყოს ნატურალური, (6) გამომდინარე, y_1 აუცილებლად უნდა იყოს 1-ის ტოლი, ე.ი. $y_1 = 1$.

(5)-ში ჩასმით $d = (x_1 + 1)^{x_1-1}$. საბოლოოდ გვაქვს, რომ (1)-ის ყველა ამონახსნის წყვილი მიიღება მოცემული სისტემიდან:

$$\begin{cases} x = t(t+1)^{t-1}, \\ y = (t+1)^{t-1} \\ t \in \mathbb{N} \end{cases}$$

ამოცანა VIII. ამოხსენით განტოლება

$$(x + y)^y = (x - y)^x, \quad (x > y) \quad (1)$$

ნატურალურ რიცხვებში.

ამოხსნა

ვთქვათ, (1) განტოლების ამონახსნებია: x_0 და y_0 , სადაც $(x_0, y_0) = d$, $x_0 = x_1 d$ და $y_0 = y_1 d$. ე.ი. $(x_1, y_1) = 1$, $x_1, y_1 \in N$.

(1)-ში ჩასმით და გამარტივებით

$$(x_1 + y_1)^{y_1} = (x_1 - y_1)^{x_1} d^{x_1 - y_1}, \quad (2)$$

ე.ი.

$$\left(\frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1} \right) \in N_1 \text{ ანუ } \left(1 + \frac{2y_1}{x_1 - y_1} \right) \in N \Rightarrow \frac{2y_1}{x_1 - y_1} \in N.$$

ამ უკანასკნელიდან **ლემის** • თანახმად

$$x_1 - y_1 = 1, (3) \text{ ან } x_1 - y_1 = 2. \quad (4)$$

განვიხილოთ შემთხვევა (3)

$$x_1 - y_1 = 1 \Rightarrow y_1 = x_1 - 1.$$

ცხადია, $x_1 > 1$.

(2)-ში ჩასმით და გამარტივებით მივიღებთ

$$d = (2x_1 - 1)^{x_1 - 1}.$$

ე.ი. (1)-ის ამონახსნებია:

$$x_0 = x_1(2x_1 - 1)^{x_1 - 1} \text{ და } y_0 = (x_1 - 1)(2x_1 - 1)^{x_1 - 1}, \quad (5)$$

სადაც

$$x_1 \in N \setminus \{1\}.$$

განვიხილოთ შემთხვევა (4)

$$x_1 - y_1 = 2 \Rightarrow y_1 = x_1 - 2.$$

ცხადია, $x \in N \setminus \{1; 2\}$.

(2)-ში ჩასმით და გამარტივებით მივიღებთ

$$(x_1 - 1)^{x_1 - 2} = (2d)^2. \quad (6)$$

(6)-დან ჩანს, რომ x_1 არ შეიძლება იყოს ლუწი რიცხვი, ამიტომ

$$x_1 - 1 = (2n)^2, \text{ სადაც } n \in N \text{ ანუ } x_1 = 4n^2 + 1.$$

(6)-დან $d = \frac{(2n)^{4n^2 - 1}}{2}$, ე.ი.

$$x_0 = (4n^2 + 1) \cdot \frac{(2n)^{4n^2-1}}{2}; \quad y_0 = (4n^2 - 1) \cdot \frac{(2n)^{4n^2-1}}{2}. \quad (7)$$

საბოლოოდ გვაქვს, რომ (1)-ის ყველა ამონახსნი მოიცემა (5) და (7) ფორმულებით.

ამოცანა IX. ამოხსენით განტოლება

$$(x - y)^{x+y} = x^{x-y} \quad (x > y) \quad (1)$$

ნატურალურ რიცხვებში.

ამოხსნა

ვთქვათ, (1) განტოლების ამონახსნებია: x_0 და y_0 , $x_0 = x_1 d$, $y_0 = y_1 d$, სადაც $d = (x_0, y_0)$, $x_1, y_1, d \in N$. (1)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$d^{(x_1+y_1)} \cdot (x_1 - y_1)^{(x_1+y_1)d} = x_1^{(x_1-y_1)d} \cdot d^{(x_1+y_1)d},$$

საიდანაც

$$d^{2y_1} (x_1 - y_1)^{2y_1} = \left(\frac{x_1}{x_1 - y_1} \right)^{x_1 - y_1}. \quad (2)$$

(2)-ის მარცხენა მხარე ნატურალური რიცხვია. ამიტომ ნატურალური უნდა იყოს $\left(\frac{x_1}{x_1 - y_1} \right)$ -იც. ეს **ლემის**

● თანახმად, $x_1 - y_1 = 1 \Leftrightarrow y_1 = x_1 - 1$. (2)-ში ჩასმით და გამარტივებით მივიღებთ

$$d^{2(x_1-1)} = x_1. \quad (3)$$

მათემატიკური ინდუქციის მეთოდის გამოყენებით ადვილად მტკიცდება, რომ თუ $x_1 \in N \setminus \{1\}$, მაშინ $2^{2(x_1-1)} > x_1$, ამიტომ (3)-დან მივიღებთ, რომ $d = 1$ და $x_1 = 1$, რაც შეუძლებელია, ვინაიდან $x_1, y_1 \in N$ და $x_1 > y_1$, ე.ი. (1)-ს არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში.

ამოცანა X. ამოხსენით განტოლება

$$(x + y)^{x-y} = (x - y)^x \quad (x > y) \quad (1)$$

ნატურალურ რიცხვებში.

ამოხსნა

ვთქვათ, (1) განტოლების ამონახსნებია: x_0 და y_0 , $x_0 = x_1 d$, $y_0 = y_1 d$, სადაც $x_1, y_1, d \in N$; $(x_0, y_0) = d$. (1)-ში ჩასმითა და გამარტივებით მივიღებთ

$$(d(x_1 + y_1))^{(x_1-y_1)d} = (d(x_1 - y_1))^{x_1 d}, \quad (2)$$

საიდანაც

$$d^{x_1 - y_1} (x_1 + y_1)^{x_1 - y_1} = d^{x_1} (x_1 - y_1)^{x_1 d}, \quad (3)$$

აქედან

$$\left(\frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1}\right)^{x_1 - y_1} = d^{x_1} (x_1 - y_1)^{y_1}. \quad (4)$$

ე.ი. $\frac{x_1 + y_1}{x_1 - y_1} = 1 + \frac{2y_1}{x_1 - y_1} \in N$, ანუ **ლემის •** თანახმად გვაქვს:

$$\begin{cases} x_1 - y_1 = 1, \\ x_1 - y_1 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 - 1, \\ y_1 = x_1 - 2. \end{cases} \quad (5)$$

$$(6)$$

(5)-ის (4)-ში ჩასმით მივიღებთ $d^{x_1 - 1} = 2x_1 - 1$, საიდანაც $d = 1$ და $x_1 = 1$, ვინაიდან წინააღმდეგ შემთხვევაში

$$d^{x_1 - 1} \geq 2^{x_1 - 1} \geq 2x_1 - 1. \quad (7)$$

მათემატიკური ინდუქციის მეშვეობით ადვილი დასამტკიცებელია უტოლობა

$$2^{x_1 - 1} > 2x_1 - 1, \text{ სადაც } x_1 \in N \setminus \{1\}.$$

ე.ი. ამ შემთხვევაში არა აქვს ამონახსნი, მაშინ $y_1 = 1 - 1 = 0 \notin N$.

(6)-ის (4)-ში ჩასმით მივიღებთ

$$\left(\frac{2x_1 - 2}{2}\right)^2 = d^{x_1 - 2} \cdot 2^{x_1 - 2} \Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 = (2d)^{x_1 - 2}. \quad (8)$$

თუ $\begin{cases} d > 1 \\ x_1 > 2 \end{cases}$, მაშინ მათემატიკური ინდუქციის მეთოდით ადვილი დასამტკიცებელია, რომ $(2d)^{x_1 - 2} > (x_1 - 1)^2$.

თუ $d = 1$, (8)-დან

$$2^{x_1 - 2} = (x_1 - 1)^2. \quad (9)$$

(9)-დან $(x_1 - 1)$ და $(x_1 - 2)$ ერთდროულად უნდა იყოს ლუწი, რაც შეუძლებელია. ე.ი. (9)-ს არ გააჩნია ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში და, მაშასადამე, არც (1) -ს ექნება ამონახსნი ნატურალურ რიცხვებში.

თეორემა *: თუ $(a, b) = 1$, მაშინ $a^2 + ab + b^2$ (1)-ის თითოეულ გამყოფს აქვს (1)-ის სახე.

ჯერ დავამტკიცოთ **ლემა 1** და **ლემა 2**.

ლემა 1. თუ $(a, b) = 1$ და $a^2 + ab + b^2$ სახის რიცხვი იყოფა $c^2 + cd + d^2 = p$ ($a, b, c, d \in N$) მარტივ რიცხვზე, მაშინ განაყოფიც ზემომოცემული სახის რიცხვად შეიძლება წარმოვადგინოთ.

დამტკიცება

განვიხილოთ იგივეობები:

$$\begin{cases} (a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2) = (ac - bc)^2 + (ac - bd)(ad + bc + bd) + (ad + bc + bd)^2 & (1) \\ (a^2 + ab + b^2)(c^2 + cd + d^2) = (ab + bc)^2 + (ad - bc)(ac + bd + bc) + (ac + bd + bc)^2 & (2) \\ (ac - bd)(ac + bd + bc) = c^2(a^2 + ab + b^2) - b^2(c^2 + cd + d^2) & (3) \\ (ad - bc)(ad + bc + bd) = d^2(a^2 + ab + b^2) - b^2(c^2 + cd + d^2) & (4) \end{cases}$$

ვთქვათ, $a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{(c^2 + cd + d^2)}$, სადაც $(a, b, c, d \in \mathbb{N})$ და $c^2 + cd + d^2 = p$ მარტივი რიცხვია; ცხადია $(c, d) = 1$.

როგორც (3) და (4)-დან ჩანს შესაძლებელია შემდეგი შემთხვევები:

$$I. \begin{cases} ac - bd \equiv 0 \pmod{p}, \\ ad - bc \equiv 0 \pmod{p}, \\ c^2 + cd + d^2 = p, \\ a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (c - d)(a + b) \equiv 0 \pmod{(c^2 + cd + d^2)}, \\ a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{(c^2 + cd + d^2)}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a, b) = 1, \\ (c, d) = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b \equiv 0 \pmod{p}, \\ a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p}, \\ (a, b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p}, \\ a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p}, \\ (a, b) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ab \equiv 0 \pmod{p}, \\ a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p}, \\ (a, b) = 1. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{p}, \\ b \equiv 0 \pmod{p}, \\ (a, b) = 1. \end{cases} \Rightarrow p = 1. \text{ ეს კი შეუძლებელია.}$$

$$II. \begin{cases} ac - bd \equiv 0 \pmod{p}, \\ ad + bc + bd \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \text{ (1)-დან ცხადია, რომ წარმოდგენა შესაძლებელია;}$$

$$III. \begin{cases} ac + bd + bc \equiv 0 \pmod{p}, \\ ad - bc \equiv 0 \pmod{p}. \end{cases} \text{ (2)-დან ცხადია, რომ წარმოდგენა შესაძლებელია;}$$

$$IV. \begin{cases} ac + bd + bc \equiv 0 \pmod{p}, \\ ad + bc + bd \equiv 0 \pmod{p}, \\ a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p}, \\ (a, b) = 1, (c, d) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(c - d) \equiv 0 \pmod{(c^2 + cd + d^2)}, \\ a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{(c^2 + cd + d^2)}, \\ (a, b) = 1, (c, d) = 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \equiv 0 \pmod{p}, \\ a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{p}, \\ (a, b) = 1. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \equiv 0 \pmod{p}, \\ b \equiv 0 \pmod{p}, \\ (a, b) = 1. \end{cases} \Rightarrow p = 1. \text{ ეს კი შეუძლებელია.}$$

აქედან გამომდინარე, (1)-ის და (2)-ის $(c^2 + cd + d^2)^2$ -ზე გაყოფით მივიღებთ დასამტკიცებელს.

ე.ი. თუ $a^2 + ab + b^2 \equiv 0 \pmod{(c^2 + cd + d^2)}$, სადაც $(a, b, c, d \in \mathbb{N}, (a, b) = 1)$ და $c^2 + cd + d^2 = p$ მარტივი რიცხვია, მაშინ განაყოფსაც აქვს მოცემული სახე (ე.ი. შეიძლება წარმოვადგინოთ $A^2 + AB + B^2$ სახით, სადაც $A, B \in \mathbb{N}$. რ.დ.გ.

ლემა 2. თუ $a^2 + ab + b^2$ (1) სახის რიცხვი, სადაც $a, b \in N$ და $(a, b) = 1$, იყოფა მარტივ რიცხვზე, რომელიც არ წარმოდგება ასეთი სახით, განაყოფს აქვს გამყოფი, რომელიც არ წარმოდგება (1) სახით.

დამტკიცება

დავუშვათ, რომ

$$a^2 + ab + b^2 = x \cdot P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n \tag{2}$$

თუ P_1, P_2, \dots, P_n ყველა მარტივ გამყოფს აქვს (1) სახე, მაშინ (2)-ის თანამიმდევრობით გაყოფით P_1 -ზე, P_2 -ზე და ა.შ. P_n -ზე, წინა თეორემის ძალით, თითოეულ გამყოფს x -ის ჩათვლით უნდა ჰქონდეს (1) სახე. ეს კი ეწინააღმდეგება **ლემა 2**-ის პირობას. ამიტომ რომელიმე P_i -ს, $i = 1, \dots, n$, არა აქვს (1) სახე. რ.დ.გ.

ახლა დავამტკიცოთ

თეორემა *. თუ $a, b \in N$ და $(a, b) = 1$, მაშინ $(a^2 + ab + b^2)$ (1)-ის თითოეულ გამყოფს ექნება (1)-ის სახე.

ამოხსნა

ვთქვათ, $(a, b) = 1$, $a, b \in N$ და $(a^2 + ab + b^2)$ -ის x გამყოფს არა აქვს (1) სახე. ამასთან, ვთქვათ, $a^2 + ab + b^2$ არის ასეთ რიცხვებს შორის უმცირესი. ცხადია, a და b შემდეგი სახის შეიძლება წარმოვადგინოთ:

$$a = mx + (-1)^k c; \quad b = nx + (-1)^\ell d; \tag{2}$$

სადაც $m, n \in Z_0$; $c, d, k, \ell \in N$; $0 < x < \frac{x}{2}$, $0 < d < \frac{x}{2}$,

მაშინ

$$\begin{aligned} a^2 + ab + b^2 &= (mx + (-1)^k c)^2 + (mx + (-1)^k c)(nx + (-1)^\ell d) + (nx + (-1)^\ell d)^2 = \\ &= (m^2 + mn + n^2)x + (2(-1)^k mc + (-1)^\ell md + (-1)^k nc + 2(-1)^\ell nd)x + \\ &\quad + (c^2 + (-1)^{k+\ell} cd + d^2). \end{aligned} \tag{3}$$

შევნიშნოთ, რომ თუ k და ℓ ერთდროულად კენტია, მაშინ $mn \neq 0$. (4)

ვაჩვენოთ, რომ (2) და (4) პირობით (3)-ის პირველი ორი შესაკრების ჯამი დადებითია. მართლაც

$$\begin{aligned} &(m^2 + mn + n^2)x + (2(-1)^k mc + (-1)^\ell md + (-1)^k nc + 2(-1)^\ell nd)x > \\ &+ (-2mc - md - nc - 2nd)x > (m^2 + mn + n^2)x^2 + \left(-2m\frac{x}{2} - m\frac{x}{2} - n\frac{x}{2} - 2n\frac{x}{2}\right)x = \\ &= (2m^2 + 2mn + 2n^2 - 3m - 3n)\frac{x^2}{2} = (m(2m + n - 3) + n(2n + m - 3))\frac{x^2}{2} > 0, \end{aligned} \tag{5}$$

ვინაიდან $m \geq 1$; $n \geq 1$ და $x \in N$, ე.ი.

$$c^2 + (-1)^{k+\ell} cd + d^2 < a^2 + ab + b^2 \text{ და } c^2 + (-1)^{k+\ell} cd + d^2 \equiv 0 \pmod{x}. \tag{6}$$

შევნიშნოთ, რომ

$$c^2 - cd + d^2 = (c-d)^2 + d(c-d) + d^2, \quad (7)$$

$$c^2 - cd + d^2 = (d-c)^2 + d(d-c) + c^2, \quad (8)$$

$$\begin{cases} 0 < c < \frac{x}{2}, \\ 0 < d < \frac{x}{2}. \end{cases} \Rightarrow |c-d| < \frac{x}{2}. \quad (9)$$

ვთქვათ, k და ℓ სხვადასხვა ლუწ-კენტოვნებისაა, მაშინ (6)-დან გვაქვს:

$$c^2 + cd + d^2 = yx. \quad (10)$$

თუ c -სა და d -ს აქვს 1-ზე მეტი საერთო გამყოფი, მაშინ ის არ ყოფს x -ს, ვინაიდან ის გაყოფდა a -სა და b -საც, მაგრამ $(a,b)=1$. (10)-ის საერთო გამყოფის კვადრატზე გაყოფით, მივიღებთ

$$e^2 + ef + f^2 = zx, \quad (11)$$

ამასთან

$$e^2 + ef + f^2 < c^2 + cd + d^2 < \frac{3x^2}{4} < x^2 < a^2 + ab + b^2.$$

ე.ი. მივიღეთ $e^2 + ef + f^2 < a^2 + ab + b^2$ და მასაც აქვს გამყოფი, რომელსაც არა აქვს (1) სახე. ეს კი მიგვიყვანს უსასრულო დაშვებამდე.

ე.ი. თუ $(a,b)=1$, მაშინ (11)-ს აქვს მხოლოდ და მხოლოდ (1) სახის გამყოფები.

თუ k და ℓ ერთნაირი ლუწ-კენტოვნებისაა, მაშინ:

$$c^2 + cd + d^2 = yx \text{ და თუ } c > d.$$

(9)-იდან

$$(c-d)^2 + d(c-d) + d^2 = yx, \quad (12)$$

ხოლო, თუ $c < d$, მაშინ (10)-დან

$$(d-c)^2 + c(d-c) + c^2 = xy. \quad (13)$$

ანალოგიური მსჯელობით, როგორც (10)-ში, მივიღებთ დასამტკიცებელს ანუ თუ $(a,b)=1$, (1)-ს აქვს $(a^2 + ab + b^2)$ -ის სახის გამყოფები.

ამ თეორემის გამოყენებით მოვიყვანოთ მაგალითი. ამოვხსნათ განტოლება $x^2 + xy + y^2 = n$. ამ განტოლების ამოხსნამდე წინასწარ შეგვიძლია დავადგინოთ ამოხსნადია თუ არა ის. n -ის კანონიკურ დაშლაში კენტხარისხიანი მარტივი რიცხვებიდან თუ რომელიმეს არა აქვს პირველი სახე, მაშინ ამ განტოლებას არ გააჩნია ამონახსნი.

აქვე მოკლედ გვინდა მიმოვიხილოთ ჩვენი კვლევები ფიბონაჩის რიცხვების სფეროში.

უამრავი შრომა დაწერილი ფიბონაჩის რიცხვებზე და ამდენად თითქმის შესწავლილი უნდა იყოს მისი თვისებები, მაგრამ (მორლევას თეორემისა არ იყოს) ის შესანიშნავი თვისება, რომ ნებისმიერი სამკუთხედის თითოეული კუთხის ტრისექციის სხივების თანაკვეთაში (როგორც შიგა კუთხეების, ასევე გარე კუთხეებისაც) ყოველთვის მიიღება ტოლგვერდა სამკუთხედი, რომლის აღმოჩენიდან ჯერ არ გასულა 90 წელი, გვაფიქრებინებს, რომ მავანმა და მავანმა ერთ მშვენიერ დღეს შეიძლება აღმოაჩინოს ფიბონაჩის რიცხვების, დღევანდლამდე უცნობი, გასაოცარი თვისება.

ჩვენ გვსურს ყურადღება გავამახვილოთ რამდენიმე ფაქტზე.

ცნობილია, რომ ბინემ

$$u_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}} \quad (14)$$

ფორმულის გამოსაყვანად გამოიყენება განტოლება

$$x^2 = x+1. \quad (15)$$

ისმება კითხვა, რატომ მაინცდამაინც 15 განტოლება? ცხადია, როცა შედეგად მიიღო დიდებული ფორმულა და ნახა რომ შემოწმებისას ყველაფერი რიგზეა, აღარ ჰქონდა სურვილი აეხსნა, რა გზით მივიდა ამ ფორმულამდე. მეორე მხრივ, (15) ფორმულა თავისთავად შობს შემდეგი განტოლებების განხილვის მიზანშეწონილობასაც. ეს განტოლებებია:

$$x^3 = x^2 + x + 1; \quad (16)$$

$$x^4 = x^3 + x^2 + x + 1; \quad (17)$$

$$x^5 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \quad (18)$$

$$\dots; x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1. \quad (19)$$

ამ განტოლებების განხილვის მიზანშეწონილობას ხაზს უსვამს კიდევ ერთი გარემოება. ვიდრე მასზე ვისაუბრებდეთ, შევნიშნოთ, რომ ჩამოთვლილთაგან მხოლოდ (16) განტოლების მხარეების გრაფიკებია ჩვენთვის მარტივი აღსაქმელი, ხოლო უკვე (17)-ში დიდი წვალების შემდეგ გახდება ჩვენთვის მეტ-ნაკლებად ნათელი შემდეგ განტოლებებზე უკვე სურვილი გვეკარგება.

სხვაგვარად იქნება საქმე, თუ ვიმოქმედებთ შემდეგნაირად:

$$\begin{cases} n \in N; \\ x^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1; \\ x \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in N; \\ x^n(x-1) = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x + 1); \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n \in N; \\ x^n(x-1) = x^n - 1; \\ x \geq 1. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in N; \\ x^n = \frac{1}{2-x}; \\ x \geq 1, \quad 2-x > 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \in N; \\ x^n = \frac{1}{2-x}; \\ x \in [1; 2). \end{cases}$$

ახლა უკვე ნათელი ხდება, რასთან გვაქვს საქმე (სურ. 1, 2, 3).

განვიხილოთ $x^n = \frac{1}{2-x}$

$n=1 \Leftrightarrow x=1$

$$n=2 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ x = 1 \\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,6180 \end{cases}$$

$$n=3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1,83928 \end{cases}$$

$$n=4 \Rightarrow \begin{cases} x = -0,7748 \\ x = 1 \\ x = 1,9275 \end{cases}$$

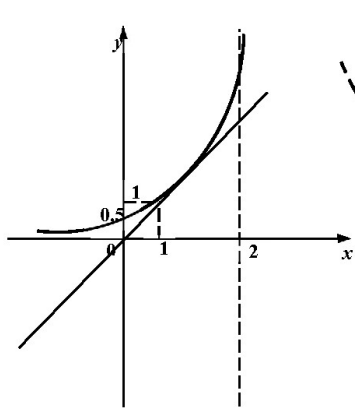
$$n=5 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1,96594 \end{cases}$$

$$n=6 \Rightarrow \begin{cases} x = -0,8403 \\ x = 1 \\ x = 1,98358 \end{cases}$$

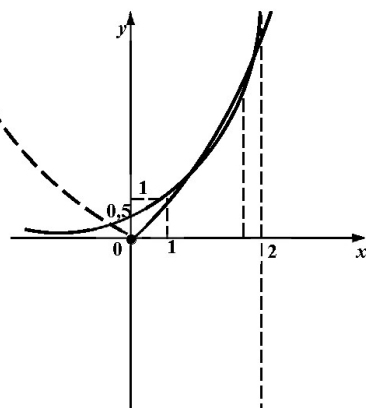
$$n=7 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1,99196 \end{cases}$$

$$n=8 \Rightarrow \begin{cases} x = -0,876 \\ x = 1 \\ x = 1,99603 \end{cases}$$

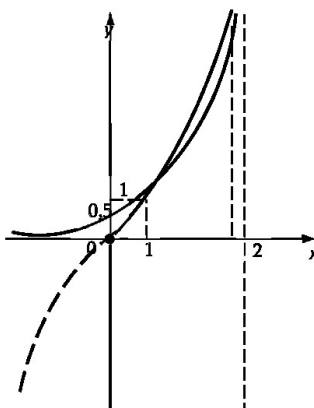
$$n=0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 1,99802 \end{cases}$$



სურ. 1



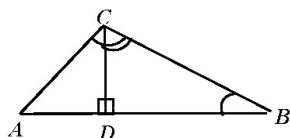
სურ. 2



სურ. 3

ჩნდება კითხვა, ხომ არ არის საჭირო გადაიხედოს ოქროს კვეთის მახასიათებელი რიცხვი $q = 1,6180$ და

ხომ არ არის ყურადსაღები აქ მიღებული მნიშვნელობები: 1; 1,83928; 1,9275; 1,98358; 1,99603; 1,99196; 1,99802 და ა.შ.



შევხვით ზოგიერთ ამოცანას აგებაზე.

ვთქვათ, მოცემულია რაიმე MN მონაკვეთი, $|MN| = a \neq 1$, იმისათვის, რომ ავაგოთ მონაკვეთები: a^2 ; a^3 ; a^4 ; ...; a^n , საჭიროა ჩავატაროთ შემდეგი მოქმედებები:

1) რაიმე p წრფეზე ავიღოთ D და B წერტილები ისე, რომ: $|DB| = 1$, $\hat{BDC} = 90^\circ$ და $|CD| = a$. მაშინ თუ C წერტილიდან აღვმართავთ მართობს p წრფის გადაკვეთამდე, მივიღებთ, რომ

$$|CD|^2 = |AD| \cdot |BD| \Rightarrow a^2 = |AD| \cdot 1 \Rightarrow |AD| = a^2.$$

2) შემდეგ ანალოგიურად ავაგებთ $\Delta A_1 C_1 B_1$ -ს, სადაც $|D_1 B_1| = a$; $|C_1 D_1| = a^2$; $\hat{A}_1 C_1 B_1 = \hat{C}_1 D_1 B_1 = 90^\circ$, მაშინ $|C_1 D_1|^2 = |A_1 D_1| \cdot |D_1 B_1| \Rightarrow (a^2)^2 = |A_1 D_1| \cdot a \Rightarrow |A_1 D_1| = a^3$ და ა.შ.

ავაგებთ $\Delta A_{n-1} C_{n-1} B_{n-1}$, სადაც

$$|D_1 B_1| = a^{n-2}; |C_1 D_1| = a^{n-1}; A_{n-1} \hat{C}_{n-1} B_{n-1} = C_{n-1} \hat{D}_{n-1} B_{n-1} = 90^\circ.$$

აქ

$$|C_{n-1} D_{n-1}|^2 = |A_{n-1} D_{n-1}| \cdot |D_{n-1} B_{n-1}| \Rightarrow (a^{n-1})^2 = |A_{n-1} D_{n-1}| \cdot a^{n-2} \Rightarrow |A_{n-1} D_{n-1}| = a^n.$$

ე.ი. თუ მოცემული გვაქვს რაიმე $[MN]$, ისეთი რომ $|MN| = a \neq 1$, მაშინ ადვილი ასაგებია a^n სიგრძის მონაკვეთი. ცნობილია, რომ ასევე მარტივი ასაგები იქნება $(2-a)$ სიგრძის მონაკვეთიც.

ახლა განვიხილოთ შემდეგი სახის მიმდევრობები:

- 1) $u_1 = u_2 = u_3 = 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3};$
- 2) $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1, \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + u_{n-4}$
- 3) $u_1 = u_2 = \dots u_k = 1, \quad u_n = u_{n-1} + \dots + u_{n-k}.$

ამ მიმდევრობებს ვუწოდოთ **ფსევდოფიბონაჩის (Fibonacci-Bussu)** რიცხვები: 1) ფსევდოფიბონაჩის რიცხვები არის მე-3 რიგის მიმდევრობა; 2) ფსევდოფიბონაჩის რიცხვები არის მე-4 რიგის მიმდევრობა; 3) k -ური რიგის მიმდევრობა.

განვიხილოთ პირველი მიმდევრობა

$$u_1 = u_2 = u_3 = 1, \quad u_4 = 3, \quad u_5 = 5, \quad u_6 = 9, \quad u_7 = 17, \quad u_8 = 31, \quad u_9 = 57, \\ u_{10} = 105, \quad u_{11} = 193$$

$$\boxed{u_n = 2u_{n-1} - u_{n-4}} \tag{1}$$

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 2, \quad S_3 = 3, \quad S_4 = 6, \quad S_5 = 11, \quad S_6 = 20, \quad S_7 = 37, \quad S_8 = 68.$$

$$\boxed{S_n = 2S_{n-1} - S_{n-4}} \tag{2}$$

და დავამტკიცოთ.

ადვილი შესამჩნევია, რომ

$$u_5 = 2u_4 - 1 = 2u_4 - u_1$$

$$u_6 = 2u_5 - 1 = 2u_5 - u_2$$

$$u_7 = 2u_6 - 1 = 2u_6 - u_3$$

$$u_8 = 2u_7 - 3 = 2u_7 - u_4$$

$$u_9 = 2u_8 - 5 = 2u_8 - u_5$$

$$u_{10} = 2u_9 - 9 = 2u_9 - u_6$$

.....

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-4}$$

შევკრიბოთ

$$\begin{aligned} u_5 + u_6 + \dots + u_n &= 2(u_4 + u_5 + \dots + u_{n-1}) - (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{n-4}) \Rightarrow \\ \Rightarrow 6 + u_5 + u_6 + \dots + u_n &= 2(3 + u_4 + u_5 + \dots + u_{n-1}) - (u_1 + u_2 + \dots + u_{n-4}) \Rightarrow \\ \Rightarrow S_n &= 2S_{n-1} - S_{n-4}. \text{ რ.დ.გ.} \end{aligned}$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ თუ $S_1 + S_2 + \dots + S_n \equiv S'_n$, მაშინ ანალოგიურად მივიღებთ $S'_n = 2S'_{n-1} - S'_{n-4}$ ყოველი $n \in N \setminus \{1; 2; 3; 4\}$ და ა.შ.

ფსევდოფიბონაჩის რიცხვებს განვსაზღვრავთ რეკურენტულად, ინდუქტიურად, მათი ნომრის მიხედვით. შესაძლებელია ასევე ვიპოვოთ ამ მიმდევრობის ნებისმიერი წევრი.

ამისათვის გამოვიკვლიოთ სხვადასხვა მიმდევრობა $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$, რომლებიც აკმაყოფილებენ დამოკიდებულებას:

$$u_n = 2u_{n-1} - u_{n-4}. \tag{7}$$

ყველა ასეთ მიმდევრობას დავარქვათ განტოლება (7)-ის ამოხსნები.

აღვნიშნოთ შესაბამისად V, V', V'' და V''' -ით მიმდევრობები:

$$v_1, v_2, v_3, \dots$$

$$v'_1, v'_2, v'_3, \dots$$

$$v''_1, v''_2, v''_3, \dots$$

$$v'''_1, v'''_2, v'''_3, \dots$$

თავდაპირველად დავამტკიცოთ ორი ლემა.

ლემა 1. თუ V არის (7)-ის ამონახსნი, ხოლო $c \in R$, მაშინ cV (ანუ მიმდევრობა cv_1, cv_2, cv_3, \dots) ასევე (7)-ის ამონახსნია.

გავამრავლოთ $v_n = 2v_{n-1} - v_{n-4}$ დამოკიდებულება წევრ-წევრად c -ზე, მივიღებთ

$$cv_n = 2cv_{n-1} - cv_{n-4}. \text{ რ.დ.გ.}$$

ლემა 2. თუ V' , V'' და V''' (7)-ის ამონახსნებია, მაშინ მათი ჯამი $V' + V'' + V'''$ (ანუ მიმდევრობა $v'_1 + v''_1 + v'''_1, v'_2 + v''_2 + v'''_2, v'_3 + v''_3 + v'''_3, \dots$) ასევე (7)-ის ამონახსნია.

ლემის პირობიდან გვაქვს

$$v'_n = 2v'_{n-1} - v'_{n-4}$$

და

$$v''_n = 2v''_{n-1} - v''_{n-4}, \quad v'''_n = 2v'''_{n-1} - v'''_{n-4}.$$

ამ ტოლობების წევრ-წევრად შეკრებით მივიღებთ

$$v'_n + v''_n + v'''_n = 2(v'_{n-1} + v''_{n-1} + v'''_{n-1}) - (v'_{n-4} + v''_{n-4} + v'''_{n-4}).$$

ამით ლემა დამტკიცებულია.

ვთქვათ, ახლა V' , V'' , V''' (7)-ის სამი პროპორციული ამონახსნია (ანუ ორი ისეთი ამონახსნია, რომ ნებისმიერი c -სთვის მოიძებნება ისეთი ნომერი n , რომლისთვისაც $\frac{v'_n}{v''_n} \neq c$). ვაჩვენოთ, რომ ყოველი V

მიმდევრობა, რომელიც (7)-ის ამონახსნია, შეგვიძლია წარმოვადგინოთ შემდეგი სახით:

$$c_1 V' + c_2 V'' + c_3 V''', \tag{8}$$

სადაც c_1 და c_2 მუდმივებია. ამიტომ შეგვიძლია ვთქვათ, რომ (8) არის (7)-ის ზოგადი ამონახსნი.

ავიღოთ ახლა (7)-ის რომელიმე V ამონახსნი, სადაც v_1 , v_2 და v_3 მოცემული მისი პირველი სამი წევრია.

ვიპოვოთ ისეთი c_1 , c_2 და c_3 , რომლისთვისაც ადგილი აქვს შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} c_1 v'_1 + c_2 v''_1 + c_3 v'''_1 = v_1 \\ c_1 v'_2 + c_2 v''_2 + c_3 v'''_2 = v_2 \\ c_1 v'_3 + c_2 v''_3 + c_3 v'''_3 = v_3 \end{cases} \tag{9}$$

(7) პირობიდან სისტემა (8) ამოხსნადია c_1 , c_2 და c_3 -ის მიმართ

$$c_1 = \frac{\Delta c_1}{\Delta} \quad \Delta c_1 = \begin{vmatrix} v_1 & v''_1 & v'''_1 \\ v_2 & v''_2 & v'''_2 \\ v_3 & v''_3 & v'''_3 \end{vmatrix}$$

$$c_2 = \frac{\Delta c_2}{\Delta} \quad \Delta c_2 = \begin{vmatrix} v'_1 & v_1 & v'''_1 \\ v'_2 & v_2 & v'''_2 \\ v'_3 & v_3 & v'''_3 \end{vmatrix}$$

$$c_3 = \frac{\Delta c_3}{\Delta} \quad \Delta c_3 = \begin{vmatrix} v'_1 & v''_1 & v_1 \\ v'_2 & v''_2 & v_2 \\ v'_3 & v''_3 & v_3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} v'_1 & v''_1 & v'''_1 \\ v'_2 & v''_2 & v'''_2 \\ v'_3 & v''_3 & v'''_3 \end{vmatrix}.$$

(7) პირობა ნიშნავს, რომ $\Delta \neq 0$. თუ მიღებულ c_1, c_2 და c_3 -ს ჩავსვამთ (8)-ში, მივიღებთ საძიებელ V მიმდევრობას.

მაშასადამე, (7) განტოლების ყველა ამონახსნის მისაღებად საკმარისია ვიპოვოთ მისი რაიმე არაპროპორციული სამი ამონახსნი.

ძებნა დავიწყოთ გეომეტრიულ პროგრესიებს შორის. **ლემა 1**-ის თანახმად, საკმარისია შემოვიფარგლოთ ისეთი პროგრესიის განხილვით, რომლის პირველი წევრი არის 1. ამრიგად, ავიღოთ პროგრესია

$$1, q, q^2, q^3, \dots$$

ის რომ იყოს (7)-ეს ამონახსნი, ამისათვის აუცილებელია ყოველი $\begin{cases} n > 4 \\ n \in N \end{cases}$ -სათვის შესრულდეს შემდეგი

პირობა:

$$q^n = 2q^{n-1} - q^{n-4}$$

ანუ, ვინაიდან $q \neq 1$, მივიღებთ

$$q^3 - q^2 - q - 1 = 0. \tag{10}$$

თუ (10)-ის ამონახსნებია: q_1, q_2, q_3 , მაშინ

$$q_1 = \frac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} + 1}{3};$$

$$q_2 = -\frac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} - 2}{6} + i\sqrt{3} \frac{(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}})}{6};$$

$$q_3 = -\frac{\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}} - 2}{6} - i\sqrt{3} \frac{(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}} - \sqrt[3]{19-3\sqrt{33}})}{6};$$

$$c_3 = \frac{(1-q)(1-q_2)}{(q_3-q)(q_3-q_2)}.$$

შეგნიშნოთ, რომ თითოეული ფესვისათვის უნდა შესრულდეს პირობა:

$$1 + q_1 + q_1^2 = q_1^3, 1 + q_2 + q_2^2 = q_2^3, 1 + q_3 + q_3^2 = q_3^3 \text{ და } q_1 q_2 q_3 = -1.$$

მივიღეთ სამი გეომეტრიული პროგრესია, რომლებიც (7)-ის ამონახსნებია. ანალოგიურად მიმდევრობა

$$c_1 + c_2 + c_3, c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3, c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2 + c_3 q_3^2, \tag{11}$$

ასევე (7)-ის ამონახსნებია. ვინაიდან ნაპოვნ პროგრესიებს აქვს განსხვავებული მნიშვნელობები, ამიტომ ისინი არაპროპორციულია. ფორმულა (11) სხვადასხვა c_1, c_2 და c_3 -სათვის მოგვცემს (7)-ის ყველა ამონახსნს.

კერძოდ, რომელიმე c_1 და c_2 -სათვის (11) ფორმულა მოგვცემს ფსევდოფიბონაჩის მწკრივს. ამისათვის (11) გადავწეროთ ასე:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ c_1 q_1 + c_2 q_2 + c_3 q_3 = 1 \\ c_1 q_1^2 + c_2 q_2^2 + c_3 q_3^2 = 1 \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{\Delta c_1}{\Delta}, c_2 = \frac{\Delta c_2}{\Delta}, c_3 = \frac{\Delta c_3}{\Delta}.$$

$$\Delta c_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & q_2 & q_3 \\ 1 & q_2^2 & q_3^2 \end{vmatrix}, \Delta c_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & 1 & q_3 \\ q_1^2 & 1 & q_3^2 \end{vmatrix}, \Delta c_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ q_1^2 & q_2^2 & 1 \end{vmatrix}, \Delta c_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ q_1^2 & q_2^2 & q_3^2 \end{vmatrix}.$$

$$u_n = c_1 q_1^{n-1} + c_2 q_2^{n-1} + c_3 q_3^{n-1}.$$

ანალოგიურად მოვიქცევით იმ შემთხვევაშიც, როცა

$$u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 1 \text{ და } u_n = u_{n-1} + u_{n-2} + u_{n-3} + u_{n-4} \text{ და ა.შ.}$$

დასკვნა

მნიშვნელოვანია p და q მარტივ რიცხვთათვის

$$A = \frac{p^q - 1}{p - 1} \text{ რიცხვის იმ მარტივ გამყოფთა}$$

რაოდენობის დადგენა, რომლებიც p -ზე ნაკლებია.

ამ მიზნით განვიხილოთ თეორემები:

თეორემა 1. ვთქვათ, p და q კენტი მარტივი რიცხ-

ვებია და $p = 2q + 1$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის სათი-

თაოდ აღებული განსხვავებული მარტივი გამყოფე-
ბიდან მხოლოდ ერთია p -ზე ნაკლები. A -ს აქვს მი-
ნიმუმ ორი განსხვავებული მარტივი გამყოფი მაინც;

თეორემა 2. ვთქვათ, p და q კენტი მარტივი რიცხ-

ვებია და $p < 2q + 1$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის ყველა

მარტივი გამყოფი მეტია p -ზე;

თეორემა 3. ვთქვათ, q კენტი მარტივი რიცხვია

და $p \in N \setminus \{1\}$, $p \in]1; q] \cup [q + 2; 2q]$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$

რიცხვის სათითაოდ აღებული განსხვავებული მარ-
ტივი გამყოფებიდან თითოეული მეტია p -ზე;

თეორემა 4. ვთქვათ, q კენტი მარტივი რიცხვია

და $p \in \{q + 1; 2q + 1\}$, მაშინ $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ რიცხვის სა-

თითაოდ აღებული განსხვავებული მარტივი გამყო-
ფებიდან, მხოლოდ ერთია p -ზე ნაკლები. A -ს აქვს
მინიმუმ ორი განსხვავებული მარტივი გამყოფი
მაინც.

ამოცანა 1. ამოვხსნათ განტოლება $2^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ ნა-

ტურალურ x, y, z რიცხვებში, ამასთან y უნდა იყოს
მარტივი რიცხვი.

ამოცანა 2. ამოვხსნათ განტოლება $3^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ ნა-

ტურალურ x, y, z რიცხვებში, ამასთან y უნდა იყოს
მარტივი რიცხვი.

ამოცანა 3. ამოვხსნათ განტოლება $p^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$,

სადაც $p \in \{6; 7; 11; 13; \dots\}$ მარტივი რიცხვია x ,
 $y \in N$ მარტივია და y მარტივია.

ქვემოთ მოცემული ლემის მეშვეობით ადვილად
 ამოიხსნება ამოცანათა კლასი:

ლემა •. ვთქვათ, $a, b, n \in N$ და $(a, b) = 1$.

დავამტკიცოთ, რომ თუ $a^n \equiv 0 \pmod{|a-b|}$ ან
 $b^n \equiv 0 \pmod{|a-b|}$, მაშინ $|a-b| = 1$.

ამოვხსნათ განტოლებები $(I - X)$ ნატურალურ x ,
 y რიცხვებში:

$$I. \left(\frac{x+y}{2}\right)^z = x^z - y^z;$$

$$VI. (x+y)^{x-y} = x^y;$$

$$II. (x+y)^z = (2x)^z + y^z;$$

$$VII. (x+y)^{x-y} = y^x;$$

$$III. (x+y)^z = (3x)^z + y^z;$$

$$VIII. (x+y)^y = (x-y)^x, (x > y);$$

$$IV. (y-x)^{x+y} = x^y, (y > x);$$

$$IX. (x-y)^{x+y} = x^{x-y};$$

$$V. (y-x)^{x+y} = y^x, (y > x);$$

$$X. (x+y)^{x-y} = (x-y)^x, (y > x).$$

თეორემა *. თუ $a, b \in N$ $(a, b) = 1$, მაშინ

$(a^2 + ab + b^2)$ -ის ყოველ გამყოფს აქვს ასეთივე სახე.

**შემოტანილია ფსევდოფიბონაჩის რიცხვების
 ცნება და ნაპოვნია მათი ზოგიერთი თვისება.**

ლიტერატურა

1. Matiyasevich Yu., Hilbert's tenth problem. MLT Press Cambridge. Massachusetts. 1993.
2. Yaglom A.E. Non-elementary tasks of elementary statement. Moscow: "Gostekhizdat". 1954. (In Russian).
3. Vorobyov N.N. Fibonacci numbers. Moscow: "Nauka". 1984. (In Russian).
4. Dickson L.E. Introduction to the theory of numbers. Academy of Sciences of GSSR. Tbilisi. 1941. (In Russian).
5. Agdgomelashvili Z. Diophantine geometric figures. Problems and solutions from the mathematical tournament of gifted children "Pythagorean Cup 2001-2004". Tbilisi: "Tsis-Nami". 2004. (In Georgian).
6. Agdgomelashvili Z. Collection of mathematical problems with solutions. Tb.: "Ganatileba". 1991. (In Georgian).
7. Agdgomelashvili Z. Mathematics (individual and group work). Tbilisi: "Tsis-Nami". 2001. (In Georgian).

UDC 511.5

SCOPUS CODE 2607

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2020-4-150-188>

Some interesting tasks from the classical number theory

Zurab Agdgomelashvili Department of Mathematics, Georgian Technical University, 77 M. Kostava str., 0160 Tbilisi, Georgia
E-mail: diophant_zura@rambler.ru

Reviewers:

Al. Kirtadze, Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU

E-mail: kirtadze2@yahoo.com

K. Shavgulidze, Associate Professor, Faculty of Exact and Natural Sciences, TSU

E-mail: ketevan.shavgulidze@tsu.ge

Abstract. The article considers the following issues:

– It's of great interest for p and q primes to determine the number of those prime number divisors of a number

$A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ that are less than p . With this purpose we have considered:

Theorem 1. Let's p and q are odd prime numbers and $p = 2q + 1$. Then from various individual divisors of the

$A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ number, only one of them is less than p . A has at least two different simple divisors;

Theorem 2. Let's p and q are odd prime numbers and $p < 2q + 1$. Then all prime divisors of the number $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$

are greater than p ;

Theorem 3. Let's q is an odd prime number, and $p \in N \setminus \{1\}$, $p \in]l; q] \cup [q + 2; 2q]$, then each of the different prime divisors of the number $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ taken separately is greater than p ;

Theorem 4. Let's q is an odd prime number, and $p \in \{q + 1; 2q + 1\}$, then from different prime divisors of the number $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ taken separately, only one of them is less than p . A has at least two different simple divisors.

Task 1. Solve the equation $2^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ in the natural numbers x, y, z . In addition, y must be a prime number.

Task 2. Solve the equation $3^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ in the natural numbers x, y, z . In addition, y must be a prime number.

Task 3. Solve the equation $p^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ where $p \in \{6; 7; 11; 13; \dots\}$ are the prime numbers, $x, y \in N$ and y is a prime number.

There is a lemma with which the problem class can be easily solved:

Lemma •. Let's $a, b, n \in N$ and $(a, b) = 1$. Let's prove that if $a^n \equiv 0 \pmod{|a-b|}$, or $b^n \equiv 0 \pmod{|a-b|}$, then $|a-b|=1$.

Let's solve the equations (I – X) in natural x, y numbers:

- I. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^z = x^z - y^z$; VI. $(x+y)^{x-y} = x^y$;
 II. $(x+y)^z = (2x)^z + y^z$; VII. $(x+y)^{x-y} = y^x$;
 III. $(x+y)^z = (3x)^z + y^z$; VIII. $(x+y)^y = (x-y)^x, (x > y)$;
 IV. $(y-x)^{x+y} = x^y, (y > x)$; IX. $(x-y)^{x+y} = x^{x-y}$;
 V. $(y-x)^{x+y} = y^x, (y > x)$; X. $(x+y)^{x-y} = (x-y)^x, (y > x)$.

Theorem *. If $a, b \in N (a, b) = 1$, then each of the divisors $(a^2 + ab + b^2)$ will be similar.

The concept of pseudofibonacci numbers is introduced and some of their properties are found.

Key word: Pseudofibonacci numbers.

UDC 511.5

SCOPUS CODE 2607

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2020-4-150-188>

Некоторые интересные задачи из классической теории чисел

Зურაბ აბდგომელაშვილი Департамент математики, Грузинский технический университет, Грузия, 0160,
 Тбилиси, ул. М. Костава, 77
 E-mail: diophant_zura@rambler.ru

Рецензенты:

Ал. Киртадзе, профессор факультета информатики и систем управления ГТУ
 E-mail: kirtadze2@yahoo.com

К. Шавгулидзе, ассоциированный профессор факультета точных и естественных наук Тбилисского государственного университета им. Иванэ Джавахившили
 E-mail: ketevan.shavgulidze@tsu.ge

Аннотация. В статье рассмотрены следующие вопросы:

– Большой интерес представляет для p и q простых чисел определение количества тех простых делителей

числа $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$, которые меньше p . С этой целью рассмотрим теоремы:

Теорема 1. Пусть p и q – нечётные простые числа и $p = 2q + 1$. Тогда из различных отдельно взятых простых делителей числа $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ только один из них меньше p . A имеет как минимум два разных простых делителя;

Теорема 2. Пусть p и q – нечётные простые числа и $p < 2q + 1$. Тогда все простые делители числа $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$ больше p ;

Теорема 3. Пусть q – нечётное простое число, и $p \in N \setminus \{1\}$, $p \in]l; q] \cup [q + 2; 2q]$, тогда каждый из различных простых делителей числа $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$, взятых по отдельности, больше p ;

Теорема 4. Пусть q – нечётное простое число и $p \in \{q + 1; 2q + 1\}$, тогда только один из различных простых делителей числа $A = \frac{p^q - 1}{p - 1}$, взятых по отдельности, меньше p . A имеет как минимум хотя бы два разных простых делителя.

Задача 1. Решить уравнение $2^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ в натуральных числах x, y, z , вместе с тем, y должно быть простым числом.

Задача 2. Решить уравнение $3^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$ в натуральных числах x, y, z , вместе с тем, y должно быть простым числом.

Задача 3. Решите уравнение $p^x = \frac{y^z - 1}{y - 1}$, где $p \in \{6; 7; 11; 13; \dots\}$ простое число $x, y \in N$, y – простое число.

Приведена лема, с помощью которой легко решится класс задачи:

Лема •. Пусть $a, b, n \in N$ и $(a, b) = 1$. Докажем, что если $a^n \equiv 0 \pmod{|a - b|}$, или $b^n \equiv 0 \pmod{|a - b|}$, тогда $|a - b| = 1$.

Решим уравнения (I – X) в натуральных x, y числах:

- | | |
|---|---------------------------------------|
| I. $\left(\frac{x+y}{2}\right)^z = x^z - y^z$; | VI. $(x+y)^{x-y} = x^y$; |
| II. $(x+y)^z = (2x)^z + y^z$; | VII. $(x+y)^{x-y} = y^x$; |
| III. $(x+y)^z = (3x)^z + y^z$; | VIII. $(x+y)^y = (x-y)^x, (x > y)$; |
| IV. $(y-x)^{x+y} = x^y, (y > x)$; | IX. $(x-y)^{x+y} = x^{x-y}$; |
| V. $(y-x)^{x+y} = y^x, (y > x)$; | X. $(x+y)^{x-y} = (x-y)^x, (y > x)$. |

Теорема *. Если $a, b \in N$ $(a, b) = 1$, тогда каждый из делителей $(a^2 + ab + b^2)$ имеет подобный вид.

В работе также рассмотрено наше исследование о числах Фибоначчи. Введено понятие чисел псевдо Фибоначчи и найдены некоторые их свойства.

Ключевые слово: числа псевдо Фибоначчи.

განხილვის თარიღი 21.07.2020

შემოსვლის თარიღი 23.07.2020

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 15.12.2020