

UDC 681.5:519.717:514.763

SCOPUS CODE 2207

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2025-4-206-212>

მართვის არაწრფივი სისტემების მდგრადობის კვლევა კატასტროფების თეორიის გამოყენებით

ნინო მჭედლიშვილი მართვის სისტემებისა და ავტომატიზაციის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: Nino.mchedlishvili@gtu.ge

ნოდარ ნარიმანაშვილი მართვის სისტემებისა და ავტომატიზაციის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77
E-mail: n.narimanashvili@gtu.ge

რეცენზენტები:

თ. ხუციშვილი, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის ასოცირებული პროფესორი

E-mail: t_khutsishvili@gtu.ge

ზ. ღურჯაია, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: z.gurckaia@gtu.ge

ანოტაცია. არაწრფივ, ჩაკეტილ დინამიკურ მართვის სისტემებში ისეთი მოვლენების კვლევა ტარდება, როდესაც შემავალი ზემოქმედების მდოვრედ ცვლილებამ შესაძლებელია გამოსასვლელი სიდიდის ნახტომისებრი ცვლილება გამოიწვიოს. დასმული ამოცანის გადაწყვეტის ძირითად ინსტრუმენტად გამოყენებულია კატასტროფების მათემატიკური თეორია. არაწრფივი სისტემის სტრუქტურა წარმოდგენილია არსებითი არაწრფივობის შემცველი სტატიკური ელემენტისა და მასთან მიმდევრობით შეერთებული წრფივი დინამიკური რგოლის სახით. სისტემის არაწრფივი ნაწილისათვის

გამოყენებულია ჰარმონიული გაწრფივების მეთოდი. კატასტროფების თეორიაზე დაყრდნობით, შემავალი ზემოქმედების ორი ძირითადი პარამეტრის სხვადასხვა ფიქსირებული მნიშვნელობისათვის აგებულია მკვეთრი თვისებრივი ცვლილების (კატასტროფების) არე. ამავე სიბრტყეზეა აგებული წრფივი ნაწილის კომპლექსური სიხშირული მახასიათებლის ჰოდოგრაფი. კატასტროფების არის საზღვრების ჰოდოგრაფთან გადაკვეთის წერტილების არსებობა მიაჩნდება გამოსასვლელის ნახტომისებრი ცვლილებაზე. სისტემის მოდელირებისათვის გამოყენებულია კომპიუტერული პროგრამული სისტემა MATLAB/Simulink.

საკვანძო სიტყვები: არაწრფივი სისტემა; კატასტროფების თეორია; მდგრადობის კვლევა; მოდელირება; ჰარმონიული გაწრფივება.

შესავალი

არაწრფივი დიფერენციალური განტოლებების ამოხსნის ერთიანი, უნივერსალური მეთოდების არარსებობა და არაწრფივობათა უსასრულო მრავალსახეობა მნიშვნელოვან პრობლემებს წარმოშობს მართვის არაწრფივი დინამიკური სისტემის იდენტიფიკაციის, ანალიზისა და სინთეზის ამოცანებში. მართვის სისტემებში ერთ-ერთი ფუნდამენტური საკითხია მდგრადობის პირობების კვლევა, მდგრადობის არეების განსაზღვრა, განსაკუთრებული ტრაექტორიები და წერტილების გამოყოფა, ბიფურკაციული ცვლილებების შეფასება და სხვა. ეს ამოცანები განსაკუთრებით აქტუალურია არსებითი არაწრფივობის შემცველ ისეთ ჩაკეტილ სისტემებში, რომლებშიც შესაძლებელია, შემავალი ზემოქმედების მდოვრედ ცვლილებისას, გამოსასვლელი სიდიდე ნახტომისებრად შეიცვალოს. ასეთი ცვლილება იწვევს სისტემის გადაყვანას ერთი წონასწორული მდგომარეობიდან მეორეში ან მთლიანად მდგრადობის პირობების დარღვევას. არაწრფივი სისტემების მდგრადობის ანალიზის კლასიკური მიდგომები ვერ უზრუნველყოფს აღნიშნული შემთხვევების პროგნოზირებას. შესაბამისად, აქტუალურია დინამიკური სისტემების მდგრადობის კვლევის ისეთი ზოგადი მეთოდების შემუშავება, რომლებიც გამოსასვლელი სიდიდის მკვეთრი ცვლილების პროგნოზირების საშუალებას მოგვცემს. ერთ-ერთი ასეთი მძლავრი თანამედროვე მათემატიკური მეთოდია კატასტროფების თეორია, რომელიც საშუალებას გვაძლევს დეტალურად გამოვიკვლიოთ

სისტემაში აღძრული ნახტომისებრი ცვლილებები და ბიფურკაციები [1, 2].

კატასტროფების თეორიას საფუძვლად დაედო უიტნის გლუვი გარდასახვების თავისებურებათა თეორია, პუანკარეს ბიფურკაციების თეორია, ლია-პუნოვის მდგრადობის თეორემები და სხვა ფუნდამენტური კვლევები. საკუთრივ კატასტროფების თეორიამ ჩამოყალიბებული სახე მიიღო რენე ტომისა და კრისტოფერ ზიმანის შრომებში 1960–1970-იან წლებში. ამ თეორიამ სწრაფად პოვა მრავალმხრივი გამოყენება ტექნიკაში, ფიზიკაში, მართვის თეორიაში, სეისმოლოგიაში და სხვა.

განვიხილოთ კატასტროფა, როგორც სისტემის თვისებრიობის მყისი, ნახტომისებრი ცვლილება გარე ზემოქმედების მდოვრე ცვლილებისას. კვლევის ძირითად ობიექტად აღებულია ჩაკეტილი არაწრფივი სისტემა უბან-უბან წრფივი სტატიკური მახასიათებლით და წრფივი დინამიკური ნაწილით, რომლებიც მიმდევრობითაა შეერთებული (ვინერ-ჰამერშტეინის მოდელები) [1]. შემავალ ზემოქმედებად განიხილება აქტიურ ექსპერიმენტში ფართოდ გავრცელებული ჰარმონიული ტიპის ტესტური სიგნალი.

განვიხილოთ სისტემა:

$$\bar{X}' = f(\bar{X}, \bar{U}), \quad (1)$$

სადაც $\bar{X}$ არის სისტემის მდგომარეობის n -განზომილებიანი ვექტორი, სოლო $\bar{U}$ – r -განზომილებიანი მართვის ვექტორი. ვთქვათ, $V(\bar{X}, \bar{U})$ რომელიმე სკალარული პოტენციური ფუნქციაა. კატასტროფების K სიმრავლე ვუწოდოთ $\bar{U} = \{u_1, u_2, \dots, u_r\}$ წერტილების ისეთ ერთობლიობას, რომლებისთვისაც $\bar{X}$ -ზე დამოკიდებული $V(\bar{X}, \bar{U})$ ფუნქციისათვის ადგილი აქვს რამდენიმე კრიტიკული წერტი-

ლის დამთხვევას (შერწყმას) ანუ K იმ წერტილთა სიმრავლეს, სადაც სრულდება:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = 0. \quad (3)$$

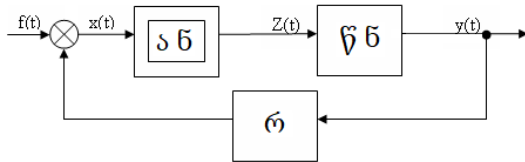
ამასთან, $V(\bar{X}, \bar{U})$ ფუნქციის ჰესეს დეტერმინანტი ნულის ტოლია [1].

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_1} & \dots & \frac{\partial^2 V}{\partial x_n \partial x_n} \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

(3) და (4) პირობებიდან შესაძლებელია მივიღოთ კატასტროფების K სიმრავლის განტოლებები სისტემის პარამეტრების სივრცეში.

ძირითადი ნაწილი

განვიხილოთ დინამიკური სისტემა, რომლის სტრუქტურული სქემა წარმოდგენილია 1-ელ სურათზე.



სურ. 1

ვიგულისხმობთ, რომ სისტემა მდგრადია, მას არ გააჩნია სუბჰარმონიული რხევები და ამასთან წრფივი ნაწილი ფილტრია, შემავალი სიგნალის მაღალსიხშირული მდგენელების მიმართ. ასეთი დავებები საფუძველს იძლევა გამოვიყენოთ ჰარმონიული გაწრფივების მეთოდი. მაშინ არაწრფივი ნაწილის გადაცემის ფუნქცია შეიძლება ჩავანაცვლოთ ეკვივალენტური კომპლექსური კოეფიციენტით [4]:

$$N(x) = a(x) + jb(x),$$

სადაც $a(x)$ და $b(x)$ ჰარმონიული გაწრფივების კოე-

ფიციენტებია ამპლიტუდაზე დამოკიდებული დაშლის პირველი ჰარმონიული მდგენელის მიმართ.

ვთქვათ, წრფივი ნაწილის კომპლექსური გადაცემის ფუნქციას აქვს სახე:

$$W^{-1}(j\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega),$$

ხოლო სისტემის შესასვლელზე მოქმედებს სინუსოიდური სიგნალი:

$$r(t) = R \sin(\omega t). \quad (5)$$

1-ელ სურათზე მოცემული სქემის შესაბამისად, არაწრფივი ელემენტის შესასვლელზე მოქმედი სიგნალი შეიძლება შემდეგნაირად ჩავწეროთ:

$$x(t) = X \sin(\omega t - \phi). \quad (6)$$

მაშინ ჩაკეტილი სისტემის კომპლექსური გადაცემის ფუნქცია მიიღებს სახეს:

$$\frac{X(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{W^{-1}(j\omega)}{W^{-1}(j\omega) + N(X)}. \quad (7)$$

ვიპოვოთ $x(t)$ და $r(t)$ ფუნქციების ლაპლასის გარდასახვათა შეფარდება:

$$\frac{L\{x(t)\}}{L\{r(t)\}} = \frac{R\omega}{X(\omega \cos \phi + s \sin \phi)}.$$

$s = j\omega$ ჩასმით გადავიდეთ სიხშირულ არეში:

$$\left| \frac{X(j\omega)}{R(j\omega)} \right|^2 = \frac{X^2}{R^2};$$

კომპლექსური გადაცემის ფუნქციისა და გაწრფივებული ფორმის გათვალისწინებით მივიღებთ:

$$\frac{X^2}{R^2} = \frac{\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)}{(\alpha(\omega) + a(X))^2 + (\beta(\omega) + b(X))^2}. \quad (8)$$

განვიხილოთ X სიდიდე, როგორც სისტემის მდგომარეობის ცვლადი, ხოლო შემავალი R ამპლიტუდა, ω სიხშირე, აგრეთვე a, b, α, β ცვლადები, როგორც მართვის ვექტორის კოორდინატები, მაშინ (8) განტოლებიდან შეიძლება მივიღოთ (1) განტოლების შესაბამისი $f(\bar{X}, \bar{U})$ ფუნქცია:

$$f(\bar{X}, \bar{U}) = X^2 \left((\alpha(\omega) + a(X))^2 + (\beta(\omega) + b(X))^2 \right) - R^2 (\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)). \quad (9)$$

აუცილებელი (4) პირობის შესასრულებლად $f(\bar{X}, \bar{U})$ -ს კერძო წარმოებულები გავუტოლოთ ნულს:

$$\left((\alpha(\omega) + a(X))^2 + (\beta(\omega) + b(X))^2 \right) + X(\alpha(\omega) + a(X))a'(X) + (\beta(\omega) + b(X))b'(X) = 0, \quad (10)$$

სადაც $a'(x) = \frac{\partial a(x)}{\partial x}$; $b'(x) = \frac{\partial b(x)}{\partial x}$.

(9) და (10) განტოლებებიდან მივიღებთ სისტემას:

$$\begin{cases} \alpha(\omega) + a(X) + \left(\frac{R}{X^2} a'(X) \lambda(\omega) \mp b'(X) (\lambda(\omega))^{\frac{1}{2}} \left(\eta(X) - \frac{R}{X^4} \lambda(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \right) (\eta(X))^{-\frac{1}{2}} \frac{R}{X} = 0: \\ \beta(\omega) + b(X) + \left(\frac{R}{X^2} b'(X) \lambda(\omega) \pm a'(X) (\lambda(\omega))^{\frac{1}{2}} \left(\eta(X) - \frac{R}{X^4} \lambda(\omega) \right)^{\frac{1}{2}} \right) (\eta(X))^{-\frac{1}{2}} \frac{R}{X} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

სადაც

$$\lambda(\omega) = (\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)); \quad \eta(X) = (a'(X))^2 + (b'(X))^2.$$

ცალსახა არაწრფივობისათვის (11) განტოლებათა სისტემა შემდეგ სახეს მიიღებს:

$$\begin{cases} \alpha(\omega) + a(X) + \frac{R^2}{X^3} (\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)) (a'(X))^{-1} = 0, \\ \beta(\omega) \mp \frac{R}{X} (a'(X))^{-1} (\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega))^{\frac{1}{2}} \left((a'(X))^2 - \frac{R^2}{X^4} (\alpha^2(\omega) + \beta^2(\omega)) \right)^{\frac{1}{2}} = 0. \end{cases} \quad (12)$$

გამოვიკვლიოთ პარამეტრების უწყვეტი ცვლილების გავლენა სისტემის ქმედებაზე. ამისათვის საჭიროა პარამეტრების სიბრტყეში გამოვყოთ კატასტროფების არე. შევარჩიოთ ორი ცვლადი პარამეტრი, ხოლო დანარჩენები მუდმივებად ჩავთვალოთ. (11) და (12) განტოლებათა სისტემების საფუძველზე კომპიუტერული პროგრამების გამოყენებით შესაძლებელია ავაგოთ კატასტროფების არეების საზღვრები, შემავალი ტესტური ზემოქმედების პარამეტრების სიბრტყეში. სისტემის წრფივი ნაწილიდან გამოვყოთ α და β პარამეტრები; დანარჩენი პარამეტრების მუდმივობის პირობებში (12)-დან გამომდინარე, კატასტროფების არეების ასაგებად მივიღებთ შემდეგ სისტემას:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{a(X) a'(X) X (R^2 - X^2) - R^2 a^2(X)}{a'(X) X (X^2 - R^2) - 2a(X) R^2} \\ \beta = \left(-(\alpha(\omega) + a(X)) (X a'(X) + \alpha(\omega) + a(X)) \right)^{\frac{1}{2}} \end{cases} \quad (13)$$

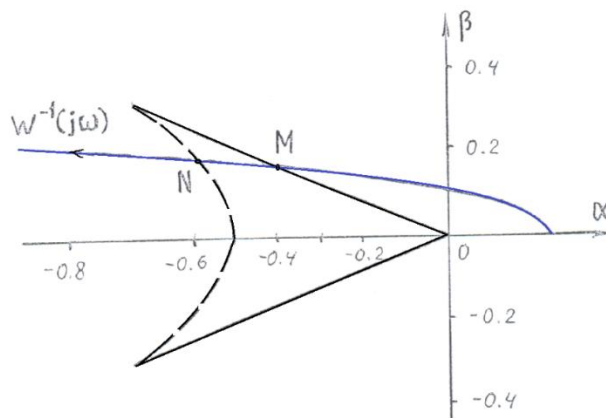
მიღებული განტოლებათა სისტემა მართებულია ნებისმიერი ცალსახა არაწრფივობისა და ნებისმიერი წრფივი ნაწილისათვის. ზემოაღწერილი მეთოდის კომპიუტერული ვიზუალიზაციისათვის განხილულია დინამიკური სისტემა 1-ელ სურათზე ნაჩვენები სტრუქტურით. გაჯერების ტიპის არაწრფივობისათვის ზემოაღწერილი მეთოდის საფუძველზე აგებულ იქნა კატასტროფების არეები შემავალი სიგნალის R და ω პარამეტრების ფიქსირებული მნიშვნელობებისათვის. ამასთან წრფივი ნაწილის გადაცემის ფუნქცია მეორე რიგითაა წარმოდგენილი:

$$W(s) = (T_2 s^2 + T_1 s + 1)^{-1}.$$

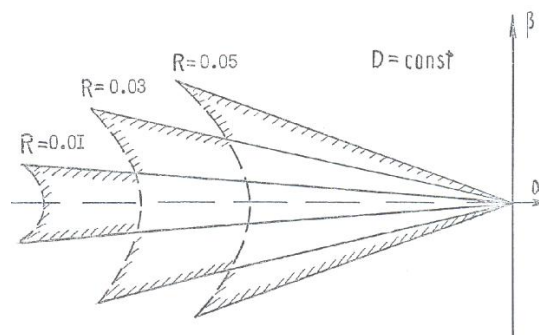
იმავე α და β პარამეტრების სიბრტყეში აგებუ-

ლია $W^{-1}(j\omega)$ კომპლექსური გადაცემის ფუნქციის ჰოდოგრაფი. კატასტროფების საზღვრების ჰოდოგრაფთან გადაკვეთის N და M წერტილები გვაძლევს პარამეტრების იმ მნიშვნელობებს, რომლებისთვის ადგილი ექნება სისტემის გამოსასვლელის ნახტომისებრ ცვლილებას. ამოცანის გრაფიკული ამონახსნების მისაღებად გამოყენებულია კომპიუტერული პროგრამული სისტემა MATLAB/Somilink [5]. მიღებული შედეგები ნაჩვენებია მე-2 სურ-ზე.

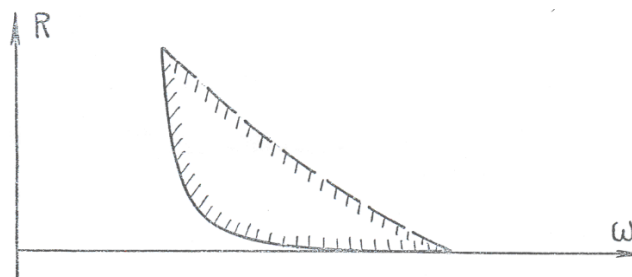
ვცვალოთ შემავალი სიგნალის R და ω პარამეტრები და ავაგოთ კატასტროფების არეები α და β პარამეტრების სიბრტყეში (სურ. 3). კატასტროფების არეები ასევე შეიძლება ავაგოთ R და ω პარამეტრების სიბრტყეში (სურ. 4).



სურ. 2



სურ. 3



სურ. 4

დასკვნა

მართვის არაწრფივი დინამიკური სისტემების მდგრადობის ზუსტი პირობების დადგენა კვლავ ინარჩუნებს აქტუალობას. ერთ-ერთი მძლავრი მათემატიკური მეთოდი, რომლის დახმარებითაც შესაძლებელია სისტემაში მოსალოდნელი თვისებრივი ცვლილებების პროგნოზირება არის კატასტროფების თეორია. ნაშრომში უბან-უბან წრფივი მა-

ხასიათებლის მქონე დინამიკური სისტემისათვის დამუშავდა კატასტროფების საზღვრების აგების მეთოდიკა. MATLAB/Somilink პროგრამული პაკეტის გამოყენებით სისტემის პარამეტრების სიბრტყეებში აგებულ იქნა კატასტროფების არეები და მოიძებნა წერტილები, სადაც სისტემა შეიძლება ერთი წონასწორული მდგომარეობიდან თვისებრივად სხვა მდგომარეობაში გადავიდეს.

ლიტერატურა

1. Mchedlishvili, N., & Narimanashvili, N. (2009). *Identification of nonlinear dynamic control systems*. Georgian Technical University.
2. Arnold, V. I., Davydov, A. A., Vassiliev, V. A., & Zakalyukin, V. M. (2006). *Mathematical models of catastrophes: Control of catastrophic processes*. IIASA Research Report (Reprint), RP-06-007. IIASA. (Original work published in *Encyclopedia of Life Support Systems*, EOLSS Publishers, Oxford, UK)
3. Zeeman, E. C. (1977). *Catastrophe theory*.
4. Mchedlishvili, N., & Narimanashvili, N. (2019). *Nonlinear and discrete control systems* [In Georgian]. Georgian Technical University.
5. Mchedlishvili, N., & Davitashvili, I. (2021). *Programming in the MATLAB environment* (2nd ed.) [In Georgian]. Georgian Technical University.

UDC 681.5:519.717:514.763

SCOPUS CODE 2207

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2025-4-206-212>

Research on the Stability of Nonlinear Control Systems Using Catastrophe Theory

Nino Mchedlishvili

Department of Automation of Control Systems, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77, M. Kostava str.

E-mail: Nino.mchedlishvili@gtu.ge

Nodar Narimanashvili

Department of Automation of Control Systems, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77, M. Kostava str.

E-mail: n.narimanashvili@gtu.ge

Reviewers:

T. Khutsishvili, Associate Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU

E-mail: t_khutsishvili@gtu.ge

Z. Gurtskaia, Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU

E-mail: z.gurtskaia@gtu.ge

Abstract. The aim of the paper is to study such phenomena in nonlinear, closed-loop dynamic control systems when a sudden change in the input can cause a sudden change in the output. The mathematical theory of catastrophes is used as the main tool for solving the problem. The structure of a nonlinear system is represented in the form of a static element containing essential nonlinearity and a linear dynamic link connected to it in series. The method of harmonic linearization is used for the nonlinear part of the system. Based on the theory of catastrophes, an area of sharp qualitative change (catastrophes) is constructed for different fixed values of the two main parameters of the input. The hodograph of the complex frequency characteristic of the linear part is constructed on the same plane. The presence of points of intersection of the boundaries of the catastrophe area with the hodograph indicates a step-like change in the output. The computer software system MATLAB/Simulink was used to model the system.

Keywords: Nonlinear system; Catastrophe theory; Stability research; Modeling; Harmonic linearization.

განხილვის თარიღი 15.04.2025

შემოსვლის თარიღი 22.04.2025

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 24.12.2025