

UDC 539.3.064:624.046.3

SCOPUS CODE 2207

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2025-4-213-218>

To Define the Displacements of the End of a Cantilever Beam Twisted About Its Axis of Symmetry

Zurab Mchedlishvili	Department of Engineering Graphics and Technical Mechanics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 68 ^a , M. Kostava str. E-mail: zurab.mch@mail.ru
Zurab Tsitskishvili	Department of Engineering Mechanics and Technical Expertise of Construction, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 68 ^b , M. Kostava str. E-mail: z.tsitskishvili@gtu.ge
Ramaz Tkemaladze	Department of Engineering Mechanics and Technical Expertise of Construction, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 68 ^a , M. Kostava str. E-mail: ramaztkemaladze@gtu.ge

Reviewers:

D. Gorgidze, Professor, Faculty of Civil Engineering, GTU
E-mail: d.gorgidze@gtu.ge

N. Natbiladze, professor, Faculty of Transportation Systems and Engineering Mechanics, GTU
E-mail: n.natbiladze@gtu.ge

Abstract.

In various branches of the construction industry, structural solutions widely use metal rods of variable geometry, different sizes and configurations, which perform various functions, both as load-bearing structural parts and as movable rings. The paper discusses the determination of the displacements at the end of a cantilever rod twisted around its own axis of symmetry, when a pair of force moments acting in two mutually perpendicular planes are applied to this end. Twisted rods of this type are components of a number of responsible elements of structures, the calculation of the mathematical models of their static and dynamic loads is carried out using the Mori formula based on the principles

of material strength. Using the mentioned mathematical model, the statics of a twisted rod are studied in the paper, and the results obtained can be used when solving practical problems.

Keywords: Construction; Pair Move; Stem.

Introduction

Some parts of various building structures and some machine units are under the influence of forces applied from interaction with various adjacent parts. These forces cause the stress-strain state of these parts. (1,2,3) As is known in order to increase the strength of

machine-building and building structures, some of their parts are given a twisted shape, which significantly increases their rigidity and carrying capacity. In addition,

the use of such parts makes it possible to create these structures as light as possible, and to produce less material consumption during their manufacture. [4,5,6].

Main Part

Spiral bar of rectangular cross section is loaded with bending moments at the end (Fig 1). You define lateral movements in the horizontal and vertical directions. Its geometric and mechanical parameters are preset b – section height, a – section width, $l \gg b$ – rod length, E – modulus of elasticity of the rod material, M_1, M_2 – bending moments applied at the end of the rod.

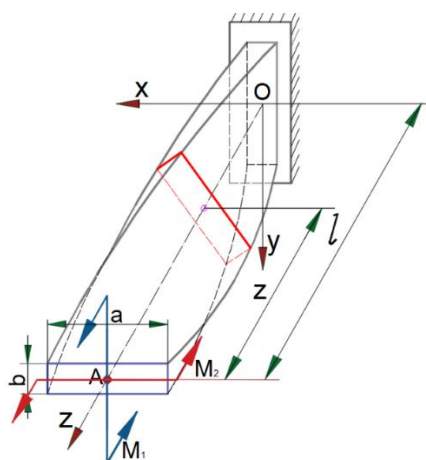


Fig. 1

To determine the movements, we use the Mohr formula. First, we obtain the dependence of the bending moments in an arbitrary section on the action of the moments M_1, M_2 applied at the end of the rod and the unit forces also applied to the end section. In an arbitrary section, in all cases of loading, oblique bending occurs (Fig 2), [7].

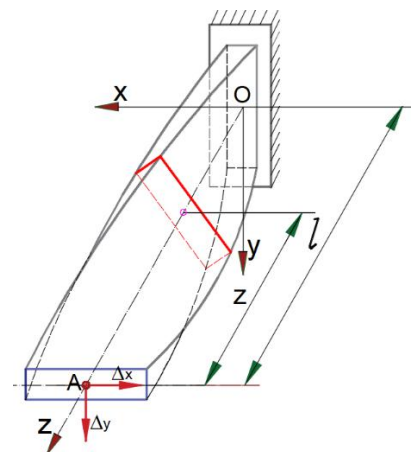


Fig. 2

$$F_{1x} = 1N; F_{1y} = 1N$$

$$M_{1x_i} = M_1 \cdot \cos(90^\circ + \varphi) + M_2 \cdot \cos(180^\circ - \varphi) = M_1 \cdot (-\sin\varphi) + M_2 \cdot (-\cos\varphi); \quad (1)$$

$$M_{y_i} = M_1 \cdot \cos\varphi + M_2 \cdot (-\sin\varphi);$$

$$M_{1x_i}^h = z \cdot (-\sin\varphi); M_{1y_i}^h = z \cdot \cos\varphi; \quad (2)$$

$$M_{1x_i}^v = z \cdot (-\cos\varphi); M_{1y_i}^v = z \cdot (-\sin\varphi); \quad (3)$$

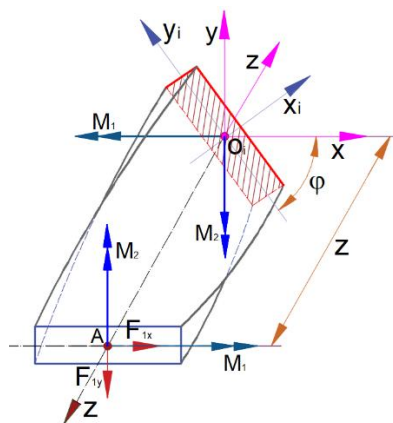


Fig. 3

We write the integrals of the pestilence to determine the horizontal and vertical displacement of the end section, given that (Fig3,4):

$$z = \frac{2l}{\pi} \varphi, dz = \frac{2l}{\pi} d\varphi \quad (4)$$

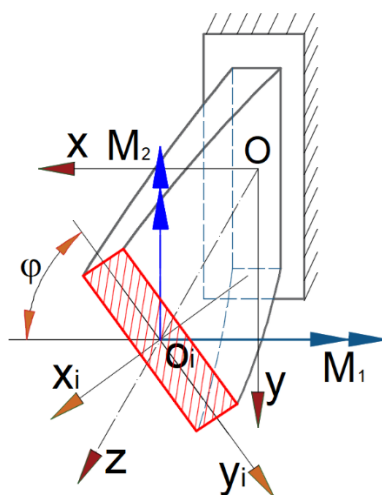


Fig. 4

$$\Delta_y = \int_0^l \frac{M_{x_i} M_{1x_i}^h}{EI_{x_i}} dz + \int_0^l \frac{M_{y_i} M_{1y_i}^h}{EI_{y_i}} dz;$$

$$\begin{aligned} 1) \int_0^l \frac{M_{x_i} M_{1x_i}^h}{EI_{x_i}} dz &= \int_0^l \frac{[M_1 \cdot (-\sin\varphi) + M_2 \cdot (-\cos\varphi)] \cdot z \cdot (-\sin\varphi)}{EI_{x_i}} dz = \int_0^l \frac{M_1 \cdot z \cdot \sin^2 \varphi + M_2 \cdot z \cdot \cos\varphi \sin\varphi}{EI_{x_i}} dz = \int_0^{\pi/2} \frac{M \cdot \frac{2l}{\pi} \varphi \sin^2 \varphi}{EI_{x_i}} \cdot \frac{2l}{\pi} d\varphi + \\ &+ \int_0^{\pi/2} \frac{M \cdot \frac{2l}{\pi} \cdot \varphi \cdot \cos\varphi \sin\varphi}{EI_{x_i}} \cdot \frac{2l}{\pi} d\varphi = \frac{4M_1 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi d\varphi + \\ &+ \frac{4M_2 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot \cos\varphi \sin\varphi d\varphi = \frac{4M_1 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \left[\left(\frac{\varphi^2}{2} - \frac{\varphi \cdot \sin 2\varphi}{4} - \frac{\cos 2\varphi}{8} \right) \right]_0^{\pi/2} + \\ &+ \frac{4M_2 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \left(-\frac{\varphi \cdot \cos 2\varphi}{4} + \frac{\sin 2\varphi}{8} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4M_1 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \frac{\pi^2 + 2}{8} + \frac{4M_2 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{M_1 l^2}{2EI_{x_i}} + \frac{M_1 l^2}{4\pi^2 EI_{x_i}} + \frac{M_2 l^2}{2\pi EI_{x_i}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \int_0^l \frac{M_{y_i} M_{1y_i}^h}{EI_{y_i}} dz &= \int_0^l \frac{[M_1 \cdot \cos\varphi + M_2 \cdot (-\sin\varphi)] \cdot z \cdot \cos\varphi}{EI_{y_i}} dz = \\ &= \int_0^l \frac{M_1 \cdot \cos^2 \varphi - M_2 \cdot z \cdot \cos\varphi \sin\varphi}{EI_{y_i}} dz = \int_0^{\pi/2} \frac{M_1 \cdot \frac{2l}{\pi} \cdot \varphi \cos^2 \varphi - M_2 \cdot \frac{2l}{\pi} \cdot \varphi \cdot \cos\varphi \sin\varphi}{EI_{y_i}} \cdot \frac{2l}{\pi} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{M_1 \cdot \frac{2l}{\pi} \varphi \cos^2 \varphi}{EI_{y_i}} \cdot \frac{2l}{\pi} d\varphi - \int_0^{\pi/2} \frac{M_2 \cdot \frac{2l}{\pi} \varphi \cdot \cos\varphi \sin\varphi}{EI_{y_i}} \cdot \frac{2l}{\pi} d\varphi = \frac{4M_1 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}} \cdot \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot \cos^2 \varphi d\varphi - \frac{4M_2 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}} \cdot \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot \cos\varphi \sin\varphi d\varphi = \\ &= \frac{4M_1 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}} \cdot \left(\frac{\varphi \cdot \sin 2\varphi}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{8} + \frac{\varphi^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} - \frac{4M_2 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}} \cdot \left(-\frac{\varphi \cdot \cos 2\varphi}{4} + \frac{\sin 2\varphi}{8} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{M_1 l^2}{2EI_{y_i}} - \frac{M_2 l^2}{2\pi EI_{y_i}} = \frac{l^2}{2EI_{y_i}} \left(M_1 - \frac{M_2}{\pi} \right); \end{aligned}$$

$$\Delta_y = \int_0^l \frac{M_{x_i} M_{1x_i}^h}{EI_{x_i}} dz + \int_0^l \frac{M_{y_i} M_{1y_i}^h}{EI_{y_i}} dz = \frac{M_1 l^2}{2EI_{x_i}} + \frac{M_1 l^2}{4\pi^2 EI_{x_i}} + \frac{M_2 l^2}{2\pi EI_{x_i}} + \frac{l^2}{2EI_{y_i}} \left(M_1 - \frac{M_2}{\pi} \right)$$

$$\Delta_x = \int_0^l \frac{M_{x_i} M_{1x_i}^v}{EI_{x_i}} dz + \int_0^l \frac{M_{y_i} M_{1y_i}^v}{EI_{y_i}} dz;$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{M_{x_i} M_{1x_i}^v}{EI_{x_i}} dz &= \int_0^l \frac{(M_1 \cdot (-\sin\varphi) + M_2 \cdot (-\cos\varphi)) z \cdot (-\cos\varphi)}{EI_{x_i}} dz = \\ &= \int_0^l \frac{M_1 \cdot z \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + M_2 \cdot z \cdot \cos^2 \varphi}{EI_{x_i}} dz = \frac{4M_1 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \times \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot \cos\varphi \sin\varphi d\varphi + \\ &+ \frac{4M_2 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{4M_1 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \left(-\frac{\varphi \cdot \cos 2\varphi}{4} + \frac{\sin 2\varphi}{8} \right) \Big|_0^{\pi/2} + \\ &+ \frac{4M_2 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \left(\frac{\varphi \cdot \sin 2\varphi}{4} + \frac{\cos 2\varphi}{8} + \frac{\varphi^2}{2} \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{4M_1 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{4M_2 l^2}{\pi^2 EI_{x_i}} \cdot \frac{\pi^2}{8} = \frac{M_1 l^2}{2\pi EI_{x_i}} + \frac{M_2 l^2}{2EI_{x_i}}; \\ \int_0^l \frac{M_{y_i} M_{1y_i}^v}{EI_{y_i}} dz &= \int_0^l \frac{[M_1 \cdot \cos\varphi + M_2 \cdot (-\sin\varphi)] \cdot z \cdot (-\sin\varphi)}{EI_{y_i}} dz = \\ &= \int_0^l \frac{-M_1 z \cdot \cos\varphi \sin\varphi + M_2 z \cdot \sin^2 \varphi}{EI_{y_i}} dz = -\frac{4M_1 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}} \cdot \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot \cos\varphi \sin\varphi d\varphi + \\ &+ \frac{4M_2 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}} \cdot \int_0^{\pi/2} \varphi \cdot \sin^2 \varphi d\varphi = -\frac{4M_1 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}} \cdot \frac{\pi}{8} + \frac{4M_2 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}} \cdot \frac{\pi^2 + 2}{8} = -\frac{M_1 l^2}{2\pi EI_{y_i}} + \frac{M_2 l^2}{2EI_{y_i}} + \frac{M_2 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}}; \end{aligned}$$

$$\Delta_x = \int_0^l \frac{M_{x_i} M_{1x_i}^v}{EI_{x_i}} dz + \int_0^l \frac{M_{y_i} M_{1y_i}^v}{EI_{y_i}} dz = \frac{M_1 l^2}{2\pi EI_{x_i}} + \frac{M_2 l^2}{2EI_{x_i}} - \frac{M_1 l^2}{2\pi EI_{y_i}} + \frac{M_2 l^2}{2EI_{y_i}} + \frac{M_2 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}};$$

The complete movement will be determined by the formula:

$$\Delta = \sqrt{\Delta_y^2 + \Delta_x^2} = \sqrt{\left(\frac{M_1 l^2}{2EI_{x_i}} + \frac{M_1 l^2}{4\pi^2 EI_{x_i}} + \frac{M_2 l^2}{2\pi EI_{x_i}} + \frac{l^2}{2EI_{y_i}} \left(M_1 - \frac{M_2}{\pi} \right) \right)^2 + \left(\frac{M_1 l^2}{2\pi EI_{x_i}} + \frac{M_2 l^2}{2EI_{x_i}} - \frac{M_1 l^2}{2\pi EI_{y_i}} + \frac{M_2 l^2}{2EI_{y_i}} + \frac{M_2 l^2}{\pi^2 EI_{y_i}} \right)^2} \quad (5)$$

let's calculate

$$I_x = \frac{4b \cdot b^3}{12} = \frac{b^4}{3}; \quad (6)$$

$$I_y = \frac{b \cdot (4b)^3}{12} = \frac{16b^4}{3}. \quad (7)$$

Conclusion

Some machine installations and building structures contain twisted parts that work in conditions of force interaction with other parts of the structure. Such interactions can create deformations of these elements, that in turn can cause the occurrence of additional

normal and tangential voltages, which can exceed the permissible values, and this can cause the part to collapse and disable the entire unit. Calculations for the strength and rigidity of such parts are an urgent task of modern mechanics and one of the solutions to this problem is shown in this work.

References

1. Bushman, E. Kh. (2001). *Calculations for strength and rigidity in simple deformations* [In Russian]. Higher School.
2. Arkusha, A. I. (2002). *A guide to solving problems in theoretical mechanics* [In Russian].
3. Ishlinsky, A. Y. (2001). *A collection of problems on the strength of materials with theory and examples* [In Russian].
4. Setkov, V. I., & Serbin, E. P. (2005). *Building structures* [In Russian].
5. Okopny, Y. A., Radin, V. P., & Chirkov, V. P. (2001). *Mechanics of materials and structures* [In Russian]. Mechanical Engineering.
6. Han, H. (1988). *Theory of elasticity: Fundamentals of linear theory and its application* [In Russian].
7. Konokhov, V. I., & Khavin, V. L. (2020). *Calculations of timber during torsion* [In Russian].

UDC 539.3.064:624.046.3

SCOPUS CODE 2207

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2025-4-213-218>

საკუთარი სიმეტრიის ღერძის გარშემო დაგრეხილი კონსოლური ღეროს ბოლოს გადაადგილებების განსაზღვრა

ზურაბ მჭედლიშვილი	საინჟინრო გრაფიკისა და ტექნიკური მექანიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 68 ^ა E-mail: zurab.mch@mail.ru
ზურაბ ციცქიშვილი	საინჟინრო მექანიკისა და მშენებლობის ტექნიკური ექსპერტიზის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 68 ^ა E-mail: z.tsitskishvili@gtu.ge
რამაზ ტყემალაძე	მექანიკის ინჟინერიისა და სამრეწველო ტექნოლოგიების დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 68 ^ა E-mail: ramaztkemaladze@gtu.ge

რეცენზენტები:

დ. გორგიძე, სტუ-ის სამშენებლო ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: d.gorgidze@gtu.ge

ნ. ნათბილაძე, სტუ-ის სატრანსპორტო სისტემებისა და მექანიკის ინჟინერიის ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: n.natbiladze@gtu.ge

ანოტაცია. სამშენებლო ინდუსტრიის გარკვეულ დარგებში არსებულ კონსტრუქციულ გადაწყვეტაში ფართოდ გამოიყენება ცვალებადი გეომეტრიის სხვადასხვა ზომისა და კონფიგურაციის მქონე ლითონის ღეროები, რომლებიც ასრულებენ ფუნქციებს, როგორც ძალოვანი კონსტრუქციული დეტალების, ისე მოძრავი რგოლების სახით. განხილულია საკუთარი სიმეტრიის ღერძის გარშემო დაგრეხილი კონსოლური ღეროს ბოლოს გადაადგილების განსაზღვრა, როდესაც ამ ბოლოზე მოდებულია ორი ურთიერთპერპენდიკულარულ სიბრტყეში მოდებული წყვილ ძალთა მომენტები. ასეთი ტიპის დაგრეხილი ღეროები კონსტრუქციების საპასუხისმგებლო ელემენტების შემადგენელი ნაწილებია, რომელთა სტატიკური და დინამიკური დატვირთვების მათემატიკური მოდელების გაანგარიშება ხდება მორის ფორმულის გამოყენებით, მასალათა გამძლეობის პრინციპებიდან გამომდინარე. აღნიშნული მათემატიკური მეთოდის გამოყენებით შესწავლილია დაგრეხილი ღეროს სტატიკა. მიღებული შედეგების გამოყენება შესაძლებელია პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნისას.

საკვანძო სიტყვები: გადაადგილება; კონსოლი; კონსტრუქცია; ღერო; წყვილ ძალთა მომენტი.

The date of review 11.04.2025

The date of submission 22.04.2025

Signed for publishing 24.12.2025