

UDC 51.42:512.7

SCOPUS CODE 2607

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2025-4-295-305>**ზოგიერთი შენიშვნა ბიდიოფანტური n -კუთხედის $n_{\max}(k)$ -ს შესახებ****ზურაბ****აღდგომელაშვილი**

მათემატიკის დეპარტამენტი, საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი,

საქართველო, 0160, თბილისი, მ. კოსტავას 77

E-mail: z.aghdgomelashvili@gtu.ge

რეცენზენტები:**ალ. კირთაძე**, სტუ-ის ინფორმატიკისა და მართვის სისტემების ფაკულტეტის პროფესორი

E-mail: kirtadze2@yahoo.com

მ. მანია, თსუ-ის ანდრია რაზმაძის სახ. მათემატიკის ინცტიტუტის მთავარი მეცნიერი თანამშრომელი

E-mail: mania@rmi.acnet.ge

ანოტაცია. ნაშრომში განხილულია ერთ-ერთი ფუნდამენტური ამოცანა ბიდიოფანტურ n -კუთხედებზე – ამოცანა $n_{\max}(k)$.

ამოცანა $n_{\max}(k)$.2. ვიპოვოთ ყოველი ბიდიოფანტური n -კუთხედისათვის ისეთი $m(k)$.2, რომლისთვისაც $n_{\max}(k).2 \leq m(k).2$, სადაც $n_{\max}(k).2$ – არის ის მაქსიმალური $n \in N$, რომლისთვისაც ბიდიოფანტური n -კუთხედის რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი ტოლია k -სი.

დადგენილია $m(k).2$, როგორც ამოზნექილი, ისე ჩაზნექილი ბიდიოფანტური n -კუთხედებისათვის.

საკვანძო სიტყვები: ამოზნექილი ბიდიოფანტური n -კუთხედი; ჩაზნექილი ბიდიოფანტური n -კუთხედი; $n_{\max}(k).2$ – მაქსიმალური $n \in N$, რომლისთვისაც ბიდიოფანტური n -კუთხედის რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი ტოლია k -სი.

შესავალი

განსაზღვრება 1. წერტილს ვუწოდებთ დიოფანტურს, თუ მისი თითოეული კოორდინატი დეკარტეს მართკუთხა კოორდინატთა სისტემაში მთელი რიცხვით არის გამოსახული;

განსაზღვრება 2. მონაკვეთს ვუწოდებთ დიოფანტურს, თუ მისი სიგრძე გამოსახება ნატურალური რიცხვით (ე.ი. არ არის აუცილებელი მისი ბოლოები იყოს დიოფანტური წერტილები);

განსაზღვრება 3. ბიდიოფანტური ვუწოდებთ ისეთ დიოფანტურ მონაკვეთს, რომლის ორივე ბოლო დიოფანტური წერტილია;

განსაზღვრება 4. დიოფანტური მრავალკუთხედი (მრავალწახნაგა) ვუწოდებთ ისეთ მრავალკუთხედს (მრავალწახნაგას), რომლის ნებისმიერ ორ წვეროს შორის მანძილი გამოსახება ნატურალური რიცხვით;

განსაზღვრება 5. ბიდიოფანტური მრავალკუთხედი (მრავალწახნაგა) ვუწოდეთ ისეთ დიოფანტურ მრავალკუთხედს (მრავალწახნაგას), რომლის ყოველი წვერო დიოფანტური წერტილია;

განსაზღვრება 6. დიოფანტური ვუწოდეთ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველ ორ წერტილს შორის მანძილი ნატურალური რიცხვით გამოისახება;

განსაზღვრება 7. კვაზიდიოფანტური ვუწოდეთ წერტილთა სიმრავლეს, რომლის ყოველ ორ წერტილს შორის მანძილი რაციონალური რიცხვით გამოისახება.

განსაზღვრება 8. ბიდიოფანტური ვუწოდეთ დიოფანტურ წერტილთა სიმრავლეს, თუ მისი ყოველი წერტილი დიოფანტურია.

დიოფანტური სიმრავლეების შემსწავლელი ამოცანებიდან ერთ-ერთი უმთავრესია შემდეგი: ყოველი $n \in \mathbb{N}$ რიცხვისათვის ევკლიდურ სიბრტყეზე არსებობს თუ არა n სიმძლავრის მქონე დიოფანტური სიმრავლე, რომლის არც ერთი სამი წერტილი ერთ წრეზე არ მდებარეობს?

ამ პრობლემური ამოცანის გადაჭრა დაკავშირებულია ვაცლავ სერპინსკის სახელთან. კერძოდ მან დაამტკიცა:

თეორემა: ყოველი $n \in \mathbb{N}$ -ისათვის ევკლიდურ სიბრტყეზე არსებობს n სიმძლავრის მქონე კვაზიდიოფანტური სიმრავლე, რომლის არც ერთი სამი წერტილი ერთ წრეზე არ მდებარეობს.

ამ ამოცანის გადასაჭრელად აჩვენეს, რომ არსებობს წრეწირი, რომელსაც ეკუთვნის აღნიშნული კვაზიდიოფანტური სიმრავლის ყველა წერტილი.

კვაზიდიოფანტური სიმრავლის აგების კონსტრუქციის მთავარი იდეა არის ის, რომ თავდაპირვე-

ლად წრეწირზე იგება ყველგან მკვრივი კვაზიდიოფანტური სიმრავლე და თუ ამ სიმრავლიდან ავიღებთ $n \in \mathbb{N}$ სიმძლავრის მქონე კვაზიდიოფანტურ ქვესიმრავლეს, რომლის ჰომოთეტიური გარდაქმნით (რომლის კოეფიციენტი, ცხადია საკმარისად დიდი რიცხვი იქნება) მივიღებთ იმავე სიმძლავრის დიოფანტურ სიმრავლეს.

ამით აჩვენეს, რომ ყოველ $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 3$)-თვის ყოველთვის არსებობს n -კუთხედი, რომლის ყოველ ორ წერტილს შორის მანძილი გამოისახება ნატურალური რიცხვით.

ეს ამოცანა თავისთავად ბადებს სერიოზულ კითხვებს. მათ შორის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესია, წარსულში, ჩვენ მიერ დასმული ფუნდამენტური ამოცანა დიოფანტური n -კუთხედებისათვის, **ამოცანა (n ; k).1.**

ამოცანა (n ; k).1. არსებობს თუ არა ყოველი ფიქსირებული $k \in \mathbb{N}$ -სთვის ისეთი დიოფანტური n -კუთხედი ($n \geq 3$), რომლის რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი ტოლია k -სი (ანუ გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე ტოლია k -სი)? და თუ არსებობს, მაშინ ვიპოვოთ ყველა ასეთი n .

ვაჩვენეთ, რომ არ არსებობს ისეთი დიოფანტური n -კუთხედი ($n > 3$), როგორც ამოზნექილი, ისე ჩაზნექილი, რომლის რომელიმე გვერდის ან დიაგონალის სიგრძე (რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი) ტოლია 1-ის. აქედან გამომდინარე, მხოლოდ დიოფანტური ტოლფერდა სამკუთხედი შეიძლება იყოს 1-ის ტოლი სიგრძის გვერდით.

ე.ი. $k=1$ -სთვის $n \in \{3\}$.

ვაჩვენეთ, რომ თუ $k=2$, მაშინ $n \in \{3; 4; 5\}$ ამოზნექილი n -კუთხედებისათვის (თუმცა ასეთი დიოფან-

ტური ხუთკუთხედი ჯერ არ არის ნაპოვნი. ვვარაუდობთ, რომ ასეთი ხუთკუთხედი არ არსებობს) და $n \in \{3; 4; 5; 6\}$ ჩაზნექილი n -კუთხედებისათვის (თუმცა ასეთი დიოფანტური ხუთკუთხედი და ექვსკუთხედი ჯერ არ არის ნაპოვნი. ვვარაუდობთ, რომ ასეთი ფიგურები არ არსებობს).

ვაჩვენეთ, რომ ამოცანა $(\pi; 3).1$ -სთვის $n \in \{3; 4; 5; 6; 7\}$. აქაც შევნიშნოთ, რომ $k=3$ -სთვის არ არის ნაპოვნი არც ერთი დიოფანტური ხუთკუთხედი, ექვსკუთხედი და შვიდკუთხედი. ვვარაუდობთ, რომ ასეთი ფიგურები არ არსებობს.

ამოცანა $(\pi; k).1$ შეიცავს ბევრ საინტერესო ქვეამოცანას. მათ შორის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესია შემდეგი:

ამოცანა $n_{\max}(k).1$. ვიპოვოთ ყოველი დიოფანტური n -კუთხედისათვის ისეთი $m(k).1$, რომლისთვისაც $n_{\max}(k).1 \leq m(k).1$, სადაც $n_{\max}(k).1$ არის ის მაქსიმალური $n \in N$, როცა დიოფანტური n -კუთხედის რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი ტოლია k -სი.

ჩვენ მიერ ნაჩვენები იყო, რომ

$$n_{\max}(k).1 \leq 4k, \text{ ანუ } m(k).1 = 4k.$$

ან ნაშრომში ჩვენ მიერ დასმულია და გადაჭრილია $n_{\max}(k).1$ -ის ანალოგიური ამოცანა ბიდიოფანტური n -კუთხედებისათვის, ამოცანა $n_{\max}(k).2$.

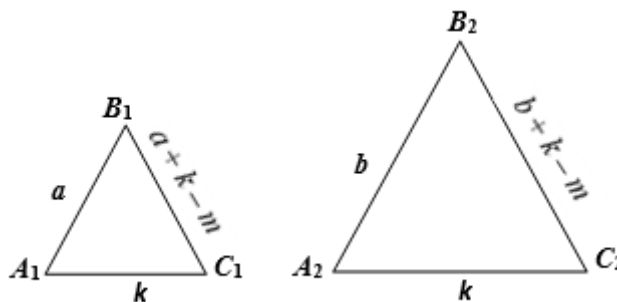
ამოცანა $n_{\max}(k).2$. ვიპოვოთ ყოველი ბიდიოფანტური n -კუთხედისათვის ისეთი $m(k).2$, რომლისთვისაც $n_{\max}(k).2 \leq m(k).2$, სადაც $n_{\max}(k).2$ – არის ის მაქსიმალური $n \in N$, როცა ბიდიოფანტური n -კუთხედის რომელიმე ორ წვეროს შორის მანძილი ტოლია k -სი.

ჩვენ მიერ ნაჩვენები იყო, რომ $k = 1$ და $k = 2$ -სთვის ასეთი ბიდიოფანტური n -კუთხედი არ არსებობს, ხოლო $k = 3$ და $k = 4$ -სთვის, $n \in \{3; 4\}$.

ე.ი. ჩვენ უნდა განვიხილოთ ამოცანა $n_{\max}(k).2$ $k \in N$ ($k \geq 5$)-სთვის. აქ შევნიშნოთ, რომ k არის მინიმალური სიგრძის ბიდიოფანტური მონაკვეთი, რომლის ორივე წვეროს შორის მოცემულ ბიდიოფანტური n -კუთხედის წვეროები.

ძირითადი ნაწილი

ამოცანა $n_{\max}(k).2$ -ის გადასაჭრელად განვიხილოთ რამდენიმე ქვეამოცანა.



სურ. 1.

განვიხილოთ 1-ელ სურ-ზე მოცემული $\Delta A_1 B_1 C_1$ და $\Delta A_2 B_2 C_2$.

$$a, b, k, m \in \mathbb{N}, a < b, k > m$$

უნდა დავამტკიცოთ, რომ: $B_1\hat{A}_1C_1 < B_2\hat{A}_2C_2$; $A_1\hat{C}_1B_1 < A_2\hat{C}_2B_2$.

დამტკიცება: $\Delta A_1B_1C_1$ და $\Delta A_2B_2C_2$ -დან კოსინუსების თეორემით გვაქვს:

$$\cos \hat{C}_1 = \frac{(a+k-m)+k^2-a^2}{2k(a+k-m)}; \cos \hat{C}_2 = \frac{(b+k-m)+k^2-b^2}{2k(b+k-m)};$$

$$\cos \hat{A}_1 = \frac{a^2+k^2-(a+k-m)^2}{2ak}; \cos \hat{A}_2 = \frac{b^2+k^2-(b+k-m)^2}{2bk}.$$

$$\begin{aligned} k > m > 0 &\Rightarrow (k-m)^2 < k^2 \Leftrightarrow ab + (a+b)(k-m) + (k-m)^2 < k^2 + ab + (k-m)(a+b) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (a+k-m)(b+k-m)((a+k-m)-(b+k-m)) < k^2((a+k-m) - \\ &- (b+k-m)) + a^2(b+k-m) - b^2(a+k-m) \Leftrightarrow ((a+k-m)^2 + k^2 - a^2)(b+k-m) > \\ &> (a+k-m)((b+k-m)^2 + k^2 - b^2) \Leftrightarrow \frac{(a+k-m)^2 + k^2 - a^2}{2k(a+k-m)} > \end{aligned}$$

$$> \frac{(b+k-m)^2 + k^2 - b^2}{2k(b+k-m)} \Rightarrow \cos \hat{C}_1 > \cos \hat{C}_2, \text{ და ვინაიდან } \hat{C}_1, \hat{C}_2 \in (0; \pi),$$

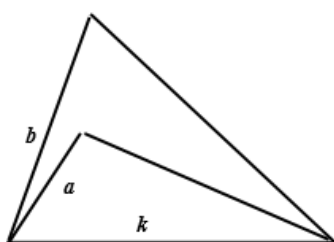
$$\text{ამიტომ } \hat{C}_2 < \hat{C}_1.$$

ანალოგიურად:

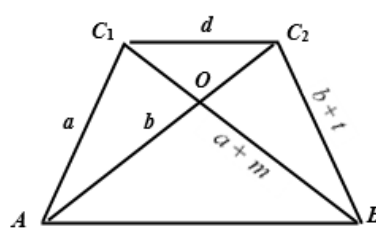
$$\begin{aligned} k > m > 0 &\Rightarrow k^2 > (k-m)^2 \Leftrightarrow ab(a-b) - k^2(a-b) > b(a+k-m)^2 - \\ &- a(b+k-m)^2 \Leftrightarrow b(a^2+k^2-(a+k-m)^2) > a(b^2+k^2-(b+k-m)^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{a^2+k^2-(a+k-m)^2}{2ak} > \frac{b^2+k^2-(b+k-m)^2}{2bk} \Rightarrow \cos \hat{A}_1 > \cos \hat{A}_2, \text{ და ვინაიდან} \end{aligned}$$

$$\hat{A}_1, \hat{A}_2 \in (0; \pi), \text{ ამიტომ } \hat{A}_1 < \hat{A}_2. \text{ რ.დ.გ.}$$

ე.ი. გვაქვს შემდეგი სურათი (სურ. 2).



სურ. 2



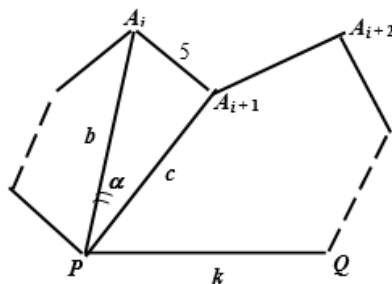
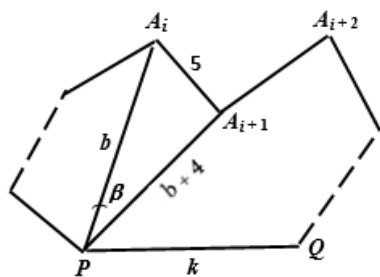
სურ. 3

ამოცანა 3. ვაჩვენოთ, რომ თუ მე-3 სურ-ზე გამოსახული ფიგურისათვის $t, a, b, k, d, m \in \mathbb{N}$, მაშინ $m > t$.

დამტკიცება. ΔAOC_1 და ΔBOC_2 -დან სამკუთხედის უტოლობის გამოყენებით ადვილად მიიღება:

$$|AC_2| + |C_1B| > |AC_1| + |BC_2| \Rightarrow b + (a+m) > a + (b+t) \Rightarrow m > t. \text{ რ.დ.გ.}$$

ამოცანა 4



სურ. 4.

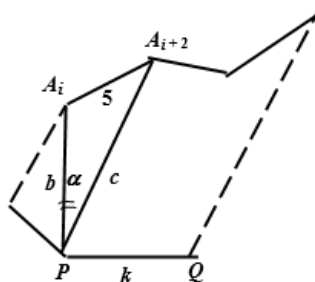
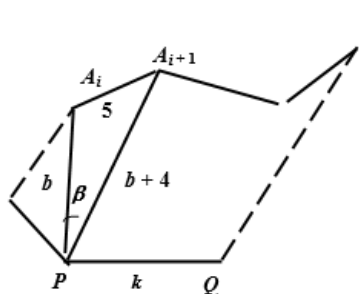
$$\begin{aligned} a, b, c &\in N \\ b - 4 &\geq 5 \\ c &\leq b - m \\ m &\in \{1; 2; 3\} \end{aligned}$$

უ.დ. $\alpha < \beta$

დამტკიცება:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} b \in N, b - 4 \geq 5; \\ m \in \{1; 2; 3\} \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \in N, b \geq 9; \\ m \in \{1; 2; 3\} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \in N, b \geq 9, m \in \{1; 2; 3\}; \\ (m - 4)b < 4(m - 4) + 9. \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \in N, b \geq 9, m \in \{1; 2; 3\}; \\ (m^2 - 16)b < 4(m^2 - 16) + 9(m + 4). \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \in N; b \geq 9, m \in \{1; 2; 3\}; \\ 1 - \frac{9}{2b(b-1)} > 1 + \frac{m^2 - 25}{2b(b-m)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \in N; b \geq 9, m \in \{1; 2; 3\}; \\ \frac{b^2 + (b-4)^2 - 5^2}{b(b-4)} > \frac{b^2 + (b-m)^2 - 5^2}{2b(b-m)} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \cos \alpha > \cos \beta, \text{ და ვინაიდან } \alpha, \beta \in (0; \pi), \text{ ამიტომ } \alpha < \beta. \text{ რ.დ.გ.} \end{aligned}$$

ამოცანა 5



სურ. 5.

$$\begin{aligned} a, b, c &\in N \\ b &\geq 5, m \in \{1; 2; 3\} \\ c &= b + m \end{aligned}$$

უ.დ. $\alpha < \beta$

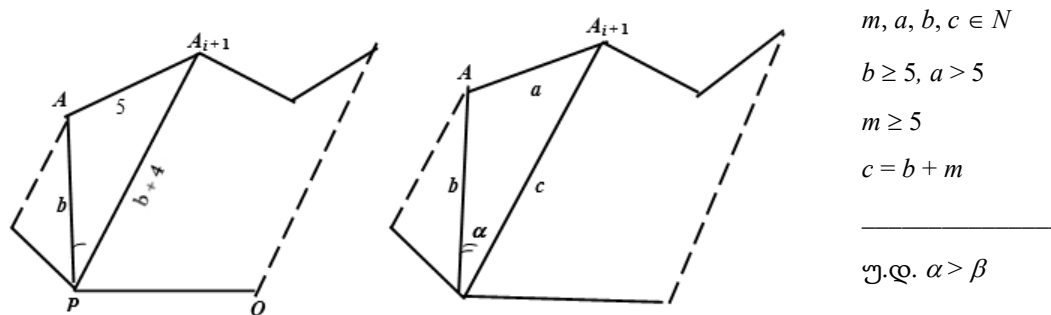
დამტკიცება:

$$\left\{ \begin{array}{l} b \in N, b \geq 5; \\ m \in \{1; 2; 3\} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \in N, b \geq 5; m \in \{1; 2; 3\}; \\ (m + 4)b > -4(m + 4) - 9 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b \in N, b \geq 9, m \in \{1; 2; 3\}; \\ (m^2 - 16)b < -4(m^2 - 16) - 9(m - 4). \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \in N, b \geq 9, m \in \{1; 2; 3\}; \\ (m^2 - 25)(b + 4) < -9(b + m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \in N; b \geq 5, m \in \{1; 2; 3\}; \\ 1 + \frac{m^2 - 25}{2b(b + m)} < 1 - \frac{9}{2b(b - 4)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b \in N; b \geq 5, m \in \{1; 2; 3\}; \\ \frac{b^2 + (b + 4)^2 - 5^2}{2b(b + m)} < \frac{b^2 + (b + 4)^2 - 5^2}{2b(b + 4)} \Leftrightarrow \cos \alpha < \cos \beta, \text{ და ვინაიდან } \alpha, \beta \in (0; \pi), \text{ ამიტომ } \alpha > \beta. \text{ რ.დ.გ.} \end{cases}$$

ამოცანა 6



სურ. 6.

დამტკიცება: $c = b + m$ ($m \in N, m \geq 5$). ამოცანა 1-ის თანახმად α -ს უმცირესი მნიშვნელობა ექნება $a = m + 5$ -სთვის. ამიტომ თუ ვაჩვენებთ, რომ $\alpha_{\min} \geq \beta$, მაშინ დეზულდება დამტკიცებული იქნება. გვაქვს:

$$\cos \beta = \frac{b^2 + (b + 4)^2 - 5^2}{2b(b + 4)} \text{ და } \cos \alpha = \frac{b^2 + (b + m)^2 - 5^2}{2b(b + m)}.$$

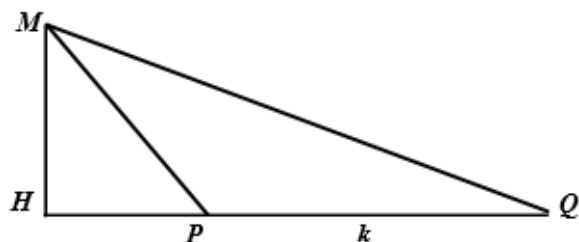
$$\begin{cases} b \in N, b \geq 5; \\ m \in N, m \geq 5. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b, m \in N, b \geq 5, m \geq 5; \\ 2(m - 4)b > m - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b, m \in N, b \geq 5, m \geq 5; \\ 9(b + m) < (2m + 1)b + 8m + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b, m \in N, b \geq 5, a \geq 5; \\ 9(b + m) < (2m + 1)(b + 4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b, m \in N, b \geq 5, a \geq 5; \\ 1 - \frac{9}{2b(b + 4)} > 1 - \frac{2m + 1}{2b(b + m)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b, m \in N, b \geq 5, a \geq 5; \\ \frac{b^2 + (b + 4)^2 - 5^2}{2b(b + 4)} > \frac{b^2 + (b + m)^2 - (m + 1)^2}{2b(b + m)} \Rightarrow \cos \beta > \cos \alpha, \text{ და ვინაიდან } \alpha, \beta \in (0; \pi), \text{ ამიტომ } \alpha > \beta. \text{ რ.დ.გ.} \end{cases}$$

ახლა განვიხილოთ ბიდიოფანტური სამკუთხედები, რომელთა რომელიმე ორ წვეროს აქვთ ტოლი ორდინატები ან ტოლი აბსცისები.

ამოცანა 7



განვიხილოთ ბიდიოფანტური ΔMPQ

$$|PQ| = k, |MP| = a$$

უ.ვ. $|MQ|_{\max}$

სურ. 7.

ამოხსნა: ვთქვათ $|MQ| = a + (k - x)$ და $|HP| = d$.

მართკუთხა ΔMHP და ΔMHQ -დან გვაქვს:

$$\begin{cases} |MH|^2 = |MP|^2 - |HP|^2; \\ |MH|^2 = |MQ|^2 - |HQ|^2. \end{cases} \Rightarrow |HP|^2 = |MQ|^2 - |HQ|^2 \Rightarrow$$

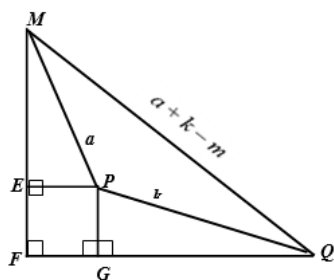
$$\Rightarrow a^2 - d^2 = (a + (k - x))^2 - (d + k)^2 \Rightarrow 2dk = 2(k - x)a - 2kx + x^2.$$

ვინაიდან $x \in N$, ამიტომ $x = 2m$, $m \in N$ და ამიტომ $|MQ| = a + (k - 2m)$. ე.ი.

$$|MQ|_{\max} = a + (k - 2).$$

ანალოგიურად მიიღება $|MQ|_{\max} = a + (k - 2)$, როცა M და P -ს ან M და Q -ს აქვს ტოლი ორდინატები ან ტოლი აბსცისები.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა როცა ბიდიოფანტური ΔMPQ წვეროებს აქვს განსხვავებული აბსცისები და განსხვავებული ორდინატები.



მოც. ΔMPQ ბიდიოფანტურია

$$|MP| = a, |PQ| = k$$

უ.ვ. $|MQ|_{\max}$

სურ. 8.

ამოხსნა. ვთქვათ $|MQ| = a + k - m$ ($k > m$), $|ME| = x$, $|EP| = |FG| = y$, $|EF| = |PG| = z$, $|GQ| = t$.

მართკუთხა ΔMEP , ΔPGQ და ΔMFG -დან გვაქვს:

$$\begin{cases} |ME|^2 + |EP|^2 = |MP|^2; \\ |PG|^2 + |GQ|^2 = |PQ|^2 \\ |MF|^2 + |FQ|^2 = |MQ|^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = a^2; \\ z^2 + t^2 = k^2; \\ (x+z)^2 + (y+t)^2 = (a+k-m)^2; \\ x, y, z, t, a, k, m \in N, \quad k > m. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + k^2 + 2xz + 2yt = a^2 + 2a(k-m) + k^2 - 2km + m^2 \\ x, y, z, t, a, k, m \in N, \quad k > m \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(xz + yt - a(k-m) + km) = m^2 \\ x, y, z, t, a, k, m \in N, \quad k > m. \end{cases} \Rightarrow m - \text{ლუწია.}$$

$$\text{ამიტომ } |MQ|_{\max} = a + k - 2.$$

ამოცანა 8. ვთქვათ სიბრტყეზე მოცემული გვაქვს n ცალი დიოფანტური წერტილი, რომელთაგან არც ერთი სამი არ მდებარეობს ერთ წრფეზე. ნებისმიერად ვირჩევთ ამ წერტილებიდან ორს, ვთქვათ P და Q წერტილს. ვაჩვენოთ, რომ ყოველთვის არსებობს ისეთი n -კუთხედი, რომლის ყოველი წვერო ეკუთვნის მოცემული წერტილებისაგან შემდგარ სიმრავლეს და P ან Q წერტილების დანარჩენ ყოველ წვეროსთან შემაერთებული მონაკვეთი მთლიანად ეკუთვნის ამ ბრტყელ n -კუთხედს.

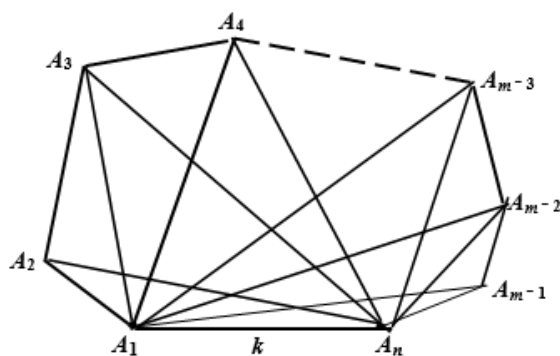
დამტკიცება: ამის საჩვენებლად (PQ) წრფის ერთ ნახევარსიბრტყეში P ან Q წერტილიდან, როგორც სათავიდან ამ ნახევარსიბრტყეში მდებარე წვეროებზე გავავლოთ სხივები. ამ სხივებით ეს ნახევარსიბრტყე დაიყოფა არაგადამფარავ ნაწილებად, რომელთაგან თითოეული შემოსაზღვრულია ამ სათავიდან გავლებული სხივთა წყვილებით. ამასთანავე თითოეული ნაწილის შიდა არეში არ მდებარეობს არც ერთი წერტილი მოცემული წერტილებიდან.

იგივე პროცედურას გავიმეორებთ იმავე წვეროდან (PQ) -ს მიმართ მეორე ნახევარსიბრტყეშიც. ნებისმიერად ავირჩიოთ რომელიმე ამ სხივებიდან და მასზე მდებარე წერტილი (წვერო) აღვნიშნოთ A_1 -ით. შემდეგ საათის ისრის მიმართულებით მეზობელ სხივზე მდებარე წერტილს დავარქვათ A_2 და ა.შ. ბოლო – A_n . ამ წვეროებს შორის იქნება P და Q წერტილებიც (მათი აღნიშვნა მოხდება შესაბამისი ნუმერაციით). ამ წერტილების მიმდევრობით შეერთებით მივიღებთ $A_1A_2...A_n$ მრავალკუთხედს, რომელიც აკმაყოფილებს მოთხოვნილ პირობებს.

განვიხილოთ **ამოცანა $n_{\max}(k)$.2** ამოზნექილი ბიდიოფანტური n -კუთხედებისათვის.

წინასწარ შევნიშნოთ, რომ თუ $A_1A_2...A_n$ ამოზნექილი n -კუთხედის ყოველი სამი წვეროთი შედგენილი სამკუთხედი არ შეიცავს შიდა წერტილად ამ ბიდიოფანტური n -კუთხედის დანარჩენი წვეროებიდან რომელიმეს: მისი ყოველი კუთხის სიდიდე ნაკლებია 180° -ზე.

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა ამოზნექილი ბიდიოფანტური n -კუთხედის გვერდის სიგრძე ტოლია k -სი (სურ. 9).



სურ. 9.

ამოცანა 1 და ამოცანა 2-დან გამომდინარე მაქსიმალური n -ის შემთხვევა არ აღემატება შემდეგს:

$$|A_2A_3| = |A_3A_4| = \dots = |A_n - 2A_{n-1}| = 5;$$

$$|A_1A_n| = k; |A_1A_2| = a = |A_nA_{n-1}|,$$

$$|A_1A_3| = a + 4, |A_1A_4| = a + 8; |A_1A_5| = a + 12 \dots$$

$$|A_2A_n| = a + (k - 2), |A_3A_n| = a + (k - 2) - 4 = a + (k - 6),$$

$$|A_4A_n| = a + (k - 10).$$

ე.ი. გვექნება სულ

$$(n-3)-1 \leq \left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil \Leftrightarrow n \leq \left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil + 4.$$

თუ $[A_1A_n]$ დიაგონალია, მაშინ ასეთი n -კუთხედი შეიძლება არსებობდეს (A_1A_n) -ის მიმართ მეორე ნახევარსიბრტყეში, და ამიტომ:

$$n_{\max}(k).2 \leq 2 \left(\left(\left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil + 4 \right) - 2 \right) + 2 = 2 \left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil + 6. \quad (*)$$

ამოცანა 3, ამოცანა 4, ამოცანა 5 და ამოცანა 6-ის თანახმად (*) ფორმულა მართებულია ჩაზნექილი ბიდიოფანტური n -კუთხედებისათვისაც.

ე.ი. საბოლოოდ გვაქვს:

$k = 1$ და $k = 2$ -სთვის ბიდიოფანტური n -კუთხედი არ არსებობს;

$k = 3$ და $k = 4$ -სთვის $n \in \{3, 4\}$ ანუ $n_{\max}(k).2 = 4$;

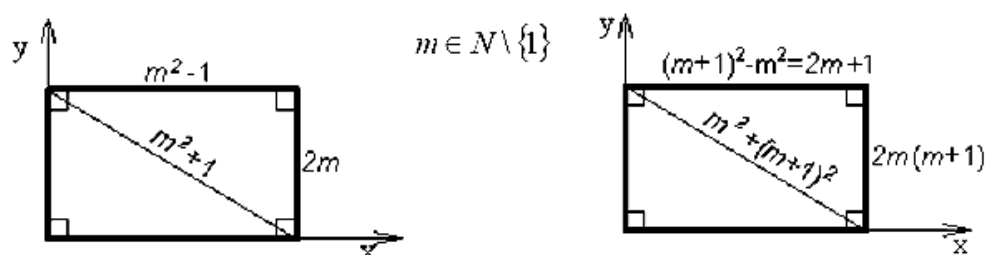
$k \in N$ და $k \geq 5$ -სთვის $n_{\max}(k).2 \leq 2 \left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil + 6$.

დასკვნა

კვლევის შედეგად დადგინდა, რომ: როგორც ამოზნექილი, ისე ჩაზნექილი ბიდიოფანტური n -კუთხედებისათვის გვაქვს:

$$n_{\max}(k).2 \leq 2 \left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil + 6, \text{ სადაც } k \in N \setminus \{1; 2\}, \text{ ე.ი. } n_0(k).2 = 2 \left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil + 6$$

მე-9 სურ-ზე მოყვანილია ყოველი $k \in N$ ($k \geq 3$)-სთვის ბიდიოფანტური ოთხკუთხედები.



სურ. 9.

ამ მნიშვნელოვანი შედეგიდან გამომდინარეობს შემდეგიც: არც ერთი $k \in \mathbb{N}$ -სთვის არ მოიძებნება ისეთი უსასრულო რაოდენობის წერტილთა ბიდიოფანტური სიმრავლე, რომელთაგან არც ერთი სამი ერთ წრფეზე არ მდებარეობს და მის რომელიმე ორ წერტილს შორის მანძილი ტოლია k -სი.

ლიტერატურა

1. Aghdgomelashvili, Z. (2024). *Diophantine, Bidiophantine, Pseudodiophantine and Pseudobidiophantine geometric figures* [In Georgian]. Tbilisi: Intellekti.
2. Aghdgomelashvili, Z. (2020). *Diophant geometric figures (Diophantine, Bidiophantine, Pseudodiophantine and Pseudobidiophantine planar geometric figures)*. LAP LAMBERT Academic Publishing. ISBN 978-720-2-52393-6.
3. Aghdgomelashvili, Z. (2003). *On a fundamental task of Diophantine geometric figures*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/2003.02652>
4. Aghdgomelashvili, Z. (2003). *On a fundamental task of Bidiophantine geometric figures*. arXiv. <https://arxiv.org/abs/2003.10846>
5. Yaglom, A. M., & Yaglom, I. M. (1954). *Non-elementary problems in an elementary presentation*. Moscow: State Publishing House of Technical-Theoretical Literature.

UDC 51.42:512.7

SCOPUS CODE 2607

<https://doi.org/10.36073/1512-0996-2025-4-295-305>

Some Notes on $n_{\max}(k)$ of Bidiophantine n -gons

Zurab
Aghdgomelashvili

Department of Mathematics, Georgian Technical University, Georgia, 0160, Tbilisi, 77,
M. Kostava str.
E-mail: z.aghdgomelashvili@gtu.ge

Reviewers:

Al. Kirtadze, Professor, Faculty of Informatics and Control Systems, GTU

E-mail: kirtadze2@yahoo.com

M. Mania, Chief Research Scientist at the Andria Razmadze Mathematical Institute of Ivane Javakhishvili, TSU

E-mail: mania@rmi.acnet.ge

Abstract. The paper deals with one of the fundamental problems on bidiophantine n -gons – Task $n_{\max}(k).2$.

Task $n_{\max}(k).2$. For every bidiophantine n -gon, find $n_0(k).2$ such that $n_{\max}(k).2 \leq n_0(k).2$, where $n_{\max}(k).2$ is the maximum $n \in N$ for which the distance between some two vertices of the bidiophantine n -gon is equal to k .

$n_0(k).2 = 2 \left\lceil \frac{k-2}{4} \right\rceil + 6$ is established for both convex and concave bidiophantine n -gons.

Keywords: Bidiophantine n -gon; Concave diophantine n -gons; $n_0(k).2$ - the maximum $n \in N$ for which the distance between some two vertices of the bidiophantine n -gon is equal to k .

განხილვის თარიღი 16.06.2025

შემოსვლის თარიღი 19.07.2025

ხელმოწერილია დასაბეჭდად 24.12.2025